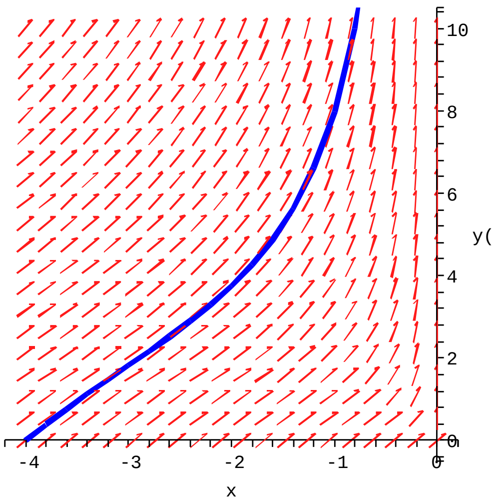
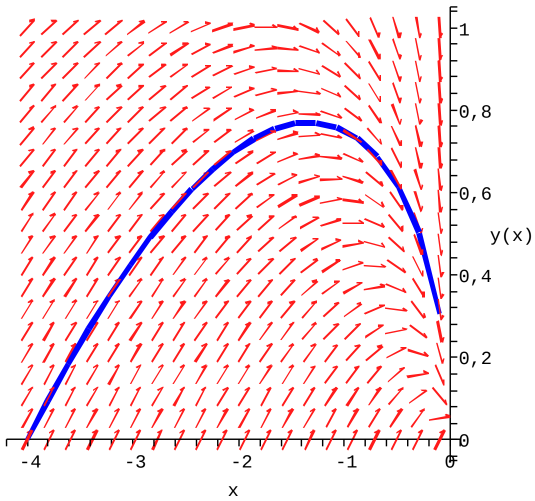
Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der beiden Teilaufgaben haben beide die Form

$$y' = \frac{y}{x} + q \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \qquad \text{mit } q > 0.$$

Im ersten Fall ist $q = 2$, im zweiten $q = \frac{1}{2}$.





Aufgabe 2.
a) An Extremstellen gilt

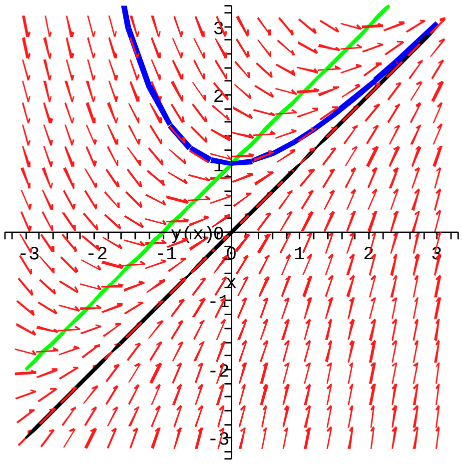
$$0 = y' = 1 + x - y$$

Die Extrema liegen also auf der Kurve $y = 1 + x$. In Wendepunkten gilt

$$0 = y'' = (y')' = (1 + x - y)' = 0 + 1 - y' = 1 - (1 + x - y) = y - x$$

Die Wendepunkte liegen also auf der Kurve $y = x$.

b)
c)



d) Die Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir schreiben sie zunächst in der gewohnten Form:

$$y' + y = 1 + x$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$y = C \cdot e^{-ax} = C \cdot e^{-x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten wir durch einen Ansatz:

$$y_p = a + bx \quad \Rightarrow \quad y_p' = b$$

$$\Rightarrow \quad 1 + x = b + (a + bx) \quad \Rightarrow \quad 1 = b \quad (\text{Koeffizient von } x) \quad 0 = a \quad (x = -1)$$

$$\Rightarrow \quad y_p = x$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip:

$$y = y_h + y_p = x + C \cdot e^{-x}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt die gesuchte Lösung:

$$1 = y(0) = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y = x + e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3.
a) Die Nullstellen des Nenners von $f(x)$ sind

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm 2 = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet folglich

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

Rechte Seite auf Hauptnenner bringen:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A\cdot(x-1) + B\cdot(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

Deshalb gilt für alle x (auch $x=-3$ und $x=1$)

$$1 = A\cdot(x-1) + B\cdot(x+3)$$

Einsetzen von $x=-3$ und $x=1$ erlaubt die Bestimmung von A und B:

$$1 = A\cdot(-4) \quad\Rightarrow\quad A = -\frac{1}{4} \quad , \qquad 1 = B\cdot 4 \quad\Rightarrow\quad B = \frac{1}{4}$$

Damit kann das unbestimmte Integral von $f(x)$ berechnet werden:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C \qquad (C\in\mathbb{R})$$

b) Das erste Integral ist ein normales (eigentliches) Integral:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x-3} = \left[-\frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{4}\ln 1\right] - \left[-\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 2\right] = -\frac{1}{4}\ln 3$$

Das zweite Integral ist uneigentlich. Direktes Einsetzen der oberen Grenze scheitert.

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x-3} = \left[-\frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1|\right]_{2}^{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1|\right] - \left[-\frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln 1\right]$$

$$= \frac{1}{4}\ln 5 + \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|\right] = \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln 1 = \frac{1}{4}\ln 5$$

c) Für konstante Lösungen ist $y' \equiv 0$. Bei der vorliegenden Differentialgleichung muss also $y^2 + 2y - 3 \equiv 0$ sein. Es gibt demnach genau zwei konstante Lösungen, nämlich $y \equiv -3$ und $y \equiv 1$.

d) Die Lösung der Differentialgleichung gelingt durch Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dy}{y^2 + 2y - 3} = \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} \qquad (y \neq -3 \quad \text{und} \quad y \neq 1)$$

$$-\frac{1}{4}\ln|y+3| + \frac{1}{4}\ln|y-1| = -\frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$$

Wegen $y > 1$ können ist $|y+3| = y+3$ und $|y-1| = y-1$. Wegen $-1 < x < 1$ ist $|x+3| = x+3$ und $|x-1| = -(x-1) = 1-x$:

$$-\frac{1}{4}\ln(y+3) + \frac{1}{4}\ln(y-1) = -\frac{1}{4}\ln(x+3) + \frac{1}{4}\ln(1-x) + C$$

$$\frac{1}{4}\ln\frac{y-1}{y+3} = \frac{1}{4}\ln\frac{1-x}{x+3} + C$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 3$ ergibt

$$\frac{1}{4}\ln\frac{2}{6} = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Die zugehörige Lösung kann nach y aufgelöst werden:

$$\frac{1}{4}\ln\frac{y-1}{y+3} = \frac{1}{4}\ln\frac{1-x}{x+3}$$

$$\frac{y-1}{y+3} = \frac{1-x}{x+3}$$

$$y - 1 = \frac{1-x}{x+3}\cdot(y+3)$$

$$y = y\cdot\frac{1-x}{x+3} + 3\cdot\frac{1-x}{x+3} + 1$$

$$y\cdot\left(1 - \frac{1-x}{x+3}\right) = \frac{3-3x}{x+3} + \frac{x+3}{x+3}$$

$$y\cdot\left(\frac{x+3}{x+3} - \frac{1-x}{x+3}\right) = \frac{6-2x}{x+3}$$

$$y\cdot\frac{2+2x}{x+3} = \frac{6-2x}{x+3}$$

$$y = \frac{3-x}{x+1}$$

Aufgabe 4.

a) Die Differentialgleichung ist offenbar für $n = 1$ linear, aber auch für $n = 0$, weil dann die Funktion y selbst gar nicht mehr in der Gleichung auftaucht. Die beiden Gleichungen sind

$$y' = 1 \quad (\text{für } n = 0) \qquad \text{und} \qquad y' - \frac{1}{1+x^2} \cdot y = 0 \quad (\text{für } n = 1)$$

Die Gleichung für $n = 0$ ist inhomogen, das Störglied ist $s(x) = 1$. Sie besitzt offenbar die allgemeine Lösung

$$y_{allg}(x) = x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Gleichung für $n = 1$ ist homogen. Sie besitzt die allgemeine Lösung

$$y_{allg}(x) = C \cdot e^{\arctan x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

b) Die Gleichung ist nur für $n = 0$ autonom. Ansonsten tritt die unabhängige Variable x explizit in der Gleichung auf. Die Gleichung ist aber für alle $n \in \mathbb{N}_0$ separabel, kann also mittels Trennung der Veränderlichen gelöst werden. Für $n \geq 2$ und $y \neq 0$ ergibt sich

$$\int \frac{dy}{y^n} = \int \frac{dx}{1+n^2x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{n} \arctan nx + C \ (C \in \mathbb{R})$$

Die allgemeine Lösung $y_{allg}(x)$ besteht für $n \geq 2$ aus der konstanten Lösung $y = 0$ und

$$y^{1-n} = \frac{1-n}{n} \arctan nx + C \ (C \in \mathbb{R})$$

Für $n < 2$ wurde die allgemeine Lösung schon in der vorigen Teilaufgabe angegeben.

c) Für gerades n ist

$$y' = \underbrace{\frac{1}{1+n^2x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{y^n}_{\geq 0} \geq 0$$

Da $e^{\arctan x}$ als Hintereinanderausführung streng monoton wachsender Funktionen auch streng monoton wachsend ist, sind für $n = 1$ genau die Lösungen $C \cdot e^{\arctan x}$ mit $C < 0$ streng monoton fallend.

d) Bekannt ist bereits, dass

$$y^{1-n} = \frac{1-n}{n} \arctan nx + C \text{ , also } y^{-3} = -\frac{3}{4} \arctan 4x + C \ (C \in \mathbb{R})$$

Die Anfangsbedingung liefert $C = -\frac{3\pi}{16}$. Um den Kehrwert bilden zu können, darf die rechte Seite nicht 0 sein, also

$$\arctan 4x \neq -\frac{\pi}{4} \ \Leftrightarrow \ 4x \neq -1 \ \Leftrightarrow \ x \neq -\frac{1}{4}$$

Wegen der Anfangsbedingung bei $x = 0$ muss $x > -\frac{1}{4}$ sein. Die gesuchte Lösung ist dann

$$y_1(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\arctan 4x + \frac{3\pi}{16}}}\,, \qquad x > -\frac{1}{4}$$

e) Für $n = 0$ ergibt die Anfangsbedingung $0 = 87 + C$, also $y_2(x) = x - 87$. Für $n = 1$ ergibt die Anfangsbedingung $0 = C \cdot 1$, also $y_2(x) \equiv 0$. Dies ist auch die Lösung für $n \geq 2$. Der Definitionsbereich ist in allen Fällen ganz $\mathbb{R}$.