

Thema: Potenzreihenansatz

Aufgabe 1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + xy = 0 ; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

- a) Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.
 b) Für welche x konvergiert diese Reihe?
 c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung als Potenzreihe an.

Aufgabe 2. (SS 96). Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x^3 y'' + xy' - y = 1$$

$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 4$$

- a) Zeigen Sie, dass die homogene Differentialgleichung eine Lösung der Form $y_1 = x^n$ besitzt.
 b) Welche einfache Lösung der inhomogenen Gleichung kann sofort erraten werden?
 c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mittels eines Potenzreihenansatzes.

Thema: Lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = s(x)$$

für folgende Störfunktionen $s(x)$:

- a) $s(x) = e^{-x} \sin 2x$
 b) $s(x) = 3 - e^{-x}$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme:

- a) $y'' + 4y = \sin 2x - 3 \cos 2x$
 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

b) $y'' - y' = x + e^{2x} \cos x$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

c) $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Aufgabe 5. Geben Sie eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten an, deren allgemeine Lösung die folgenden Funktionen (für beliebiges $a \in \mathbb{R}$) enthält:

a) $a \cdot e^{-3x} \sin 2x$

b) $x^3 e^x + a \cdot e^{-x}$

c) $\sin x + x \cdot e^{x+a}$

Welche Ordnung muss eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten jeweils mindestens haben, um die gleiche Eigenschaft zu besitzen?

Aufgabe 6. SS12 (27 Punkte). Vorgelegt ist für $a \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $a \cdot y'' + y' + y = 0$.

a) Für welchen Wert von a ist $y_1(x) = e^{2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung? Was ist dann die allgemeine Lösung?

b) Für welchen Wert von a ist $y_2(x) = e^{-x}$ eine Lösung der Differentialgleichung? Geben Sie auch für diesen Fall die allgemeine Lösung an.

c) Wie muss a gewählt werden, damit die Differentialgleichung eine Lösung der Form $y_3(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) besitzt? Was ist nun die allgemeine Lösung?

d) Für welche a gibt es eine Lösung y_4 mit $y_4(0) = 0$ und $y_4'(0) = 0$? Geben Sie diese Lösung an.

e) Für welche Werte von a besitzt das zugehörige Anfangswertproblem $y(0) = 0$ und $y'(0) = 3$ eine eindeutige Lösung y_5 ?

Achtung: Die Antwort muss (wie immer!) begründet sein. Die Lösung braucht aber nicht bestimmt zu werden.