Aufgabe 1.
a) Wir setzen die gesuchte Lösung in Form einer Potenzreihe an:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i x^{i-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i\,(i-1) \cdot a_i x^{i-2}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$0 = \sum_{i=2}^{\infty} i\,(i-1) \cdot a_i x^{i-2} + x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=2}^{\infty} i\,(i-1) \cdot a_i x^{i-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1}$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} j = i-2 \\ i = j+2 \end{array}} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)\,(j+1) \cdot a_{j+2} x^j + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1}$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} k = i+1 \\ i = k-1 \end{array}} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)\,(i+1) \cdot a_{i+2} x^i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[(i+2)\,(i+1) \cdot a_{i+2} + a_{i-1}\right] \cdot x^i + \sum_{i=0}^{0} (i+2)\,(i+1) \cdot a_{i+2} x^i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[(i+2)\,(i+1) \cdot a_{i+2} + a_{i-1}\right] \cdot x^i + 2a_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$0 = 2a_2, \qquad \text{und für } i \geq 1:$$

$$0 = (i+2)\,(i+1)\,a_{i+2} + a_{i-1} \qquad \Rightarrow \qquad a_{i+2} = -\frac{1}{(i+2)\,(i+1)} a_{i-1}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$0 = y\,(0) = a_0, \qquad 1 = y'\,(0) = a_1, \qquad a_2 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$a_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} a_0 = 0, \qquad a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3} a_1 = -\frac{1}{4 \cdot 3}, \qquad a_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} a_2 = 0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5} a_3 = 0, \qquad a_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6} a_4 = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \qquad a_8 = -\frac{1}{8 \cdot 7} a_5 = 0$$

...

Damit haben wir die Lösung in Form einer Potenzreihe:

$$y = x - \frac{1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^7 - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^{10} + - \dots$$

b) Eine direkte Anwendung des Quotientenkriteriums scheitert, weil unendlich viele Glieder 0 sind. Durch eine Substitution werden diese "Löcher" beseitigt:

$$y = x - \frac{1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^7 - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^{10} + - \dots$$

$$= x \cdot \left(1 - \frac{1}{4\cdot 3}x^3 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^6 - \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^9 + - \dots\right)$$
$$= \boxed{u = x^3} = x \cdot \left(1 - \frac{1}{4\cdot 3}u + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}u^2 - \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}u^3 + - \dots\right)$$

Auf die Potenzreihe in u kann das Quotientenkriterium angewandt werden:

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| = \frac{1}{4\cdot 3}; \ \left|\frac{a_2}{a_1}\right| = \frac{1}{7\cdot 6}; \ \left|\frac{a_3}{a_2}\right| = \frac{1}{10\cdot 9} \ ... \ \Rightarrow \ \alpha := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

$\Rightarrow$ Der Konvergenzradius ist $R = \dfrac{1}{\alpha} = \infty$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für alle $u \in \mathbb{R}$

Hieraus ergibt sich, dass die Ausgangsreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Hinweis: Im vorliegenden Fall führt auch direkte Anwendung des Wurzelkriteriums zum Ziel, wenngleich die Überlegungen komplizierter sind. Normalerweise ist für solche Lückenreihen eine allgemeinere Version des Wurzelkriteriums notwendig.

c) Die beiden Koeffizienten a_0 und a_1 sind die Integrationskonstanten. Aus den in Teil a entwickelten Rekursionsformeln ergibt sich:

$$y = a_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 - \frac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + - \dots\right)$$
$$+ a_1 \cdot \left(x - \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 - \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + - \dots\right) \qquad (a_0,\ a_1 \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 2.

a) Der Nachweis geschieht durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$y_1 = x^n \quad \Rightarrow \quad y_1' = n \cdot x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad y_1'' = n\,(n-1)\cdot x^{n-2} \Rightarrow$$
$$0 = x^3 y_1'' + x y_1' - y_1 = n\,(n-1)\,x^{n+1} + n x^n - x^n = n\,(n-1)\,x^{n+1} + (n-1)\,x^n$$

Dies gilt genau dann für alle x, wenn beide Koeffizienten verschwinden, also für $n = 1$. Die Funktion $y_1 = x$ löst die homogene Differentialgleichung.

b) Die konstante Lösung $y = -1$ ist unmittelbar zu erkennen.

c) Wir setzen die gesuchte Lösung in Form einer Potenzreihe an:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i x^{i-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i\,(i-1)\cdot a_i x^{i-2}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$1 = x^3 \cdot \sum_{i=2}^{\infty} i\,(i-1)\cdot a_i x^{i-2} + x \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i x^{i-1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} i\,(i-1) \cdot a_i x^{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} j = i+1 \\ i = j-1 \end{array}} = \sum_{j=3}^{\infty} (j-1)\,(j-2) \cdot a_{j-1} x^j + \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=3}^{\infty} \left[(i-1)\,(i-2) \cdot a_{i-1} + i \cdot a_i - a_i\right] \cdot x^i + \sum_{i=1}^{2} i \cdot a_i x^i - \sum_{i=0}^{2} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=3}^{\infty} \left[(i-1)\,(i-2) \cdot a_{i-1} + (i-1) \cdot a_i\right] \cdot x^i + \left(a_1 x + 2a_2 x^2\right) - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right)$$

$$= \sum_{i=3}^{\infty} \left[(i-2) \cdot a_{i-1} + a_i\right] \cdot (i-1)\, x^i + \left(-a_0 + a_2 x^2\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$1 = -a_0, \quad 0 = 0, \quad 0 = a_2 \quad \text{und für } i \geq 3:$$

$$0 = \left[(i-2)\, a_{i-1} + a_i\right] \cdot (i-1) \quad \Rightarrow \quad a_i = -(i-2) \cdot a_{i-1} \quad \Rightarrow \quad a_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -1 + a_1 x$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$3 = y\,(1) = -1 + a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 4; \quad 4 = y'\,(1) = a_1$$

$\Rightarrow \quad y = 4x - 1$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

Hinweis: Beachten Sie, dass die mittels Potenzreihenansatz gefundene Lösung $y = -1 + a_1 x$ nur einen Parameter enthält, also nicht die allgemeine Lösung darstellt. Insofern ist es reine Glückssache, ob die Lösung des Anfangswertproblems überhaupt darin enthalten ist. Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, dass die Normalform der Differentialgleichung (Koeffizient von y'' gleich 1) bei $x = 0$ nicht definiert ist. Deshalb kann - wie geschehen - beim Potenzreihenansatz um $x = 0$ eine Lösung verloren gehen.

Aufgabe 3. Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung über das charakteristische Polynom:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \text{ ist zweifache Nullstelle}$$

$$\Rightarrow \quad y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x}$$

Eine spezielle Lösung y_p der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch einen Ansatz. Die allgemeine Lösung ergibt sich nach dem Superpositionsprinzip als Summe dieser speziellen Lösung und der bereits bekannten allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

a) $s(x) = e^{-x} \sin 2x$:
Die zugehörige komplexe Störung ist

$$\tilde{s}(x) = e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x) = e^{(-1+2i)x}.$$

Wir wählen den komplexen Ansatz

$$z_p = a \cdot e^{(-1+2i)x} \quad \Rightarrow \quad z_p' = a(-1+2i)e^{(-1+2i)x} \quad \Rightarrow \quad z_p'' = a(-1+2i)^2 e^{(-1+2i)x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad e^{(-1+2i)x} &= \tilde{s}(x) = z_p'' + 2z_p' + z_p \\
&= a(-1+2i)^2 e^{(-1+2i)x} + 2a(-1+2i)e^{(-1+2i)x} + a \cdot e^{(-1+2i)x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = a(-1+2i)^2 + 2a(-1+2i) + a = a(-1-4i-4) + 2a(-1+2i) + a = -4a$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad z_p = -\frac{1}{4} \cdot e^{(-1+2i)x} = -\frac{1}{4}e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x)$$

Die reelle Störung ist gerade der Imaginärteil der komplexen Störung. Daher ergibt sich

$$y_p = \mathrm{Im}(z_p) = -\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x + C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot xe^{-x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b) Wir zerlegen die Störung in die beiden Störfunktionen $s_1(x) = 3$ und $s_2(x) = e^{-x}$.
$s_1(x) = 3$:

$$y_{p1} = a \quad \Rightarrow \quad y_{p1}' = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{p1}'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3 = s_1(x) = y_{p1}'' + 2y_{p1}' + y_{p1} = 0 + 0 + a \quad \Rightarrow \quad a = 3 \quad \Rightarrow \quad y_{p1} = 3$$

$s_2(x) = e^{-x}$:
Bei dieser Störung liegt Resonanz vor, da -1 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

$$y_{p2} = a \cdot x^2 e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_{p2}' = 2a \cdot xe^{-x} - a \cdot x^2 e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad y_{p2}'' &= 2a \cdot e^{-x} - 2a \cdot xe^{-x} - 2a \cdot xe^{-x} + a \cdot x^2 e^{-x} \\
&= 2a \cdot e^{-x} - 4a \cdot xe^{-x} + a \cdot x^2 e^{-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad e^{-x} &= s_2(x) = y_{p2}'' + 2y_{p2}' + y_{p2} \\
&= a \cdot e^{-x} \cdot ((2 - 4x + x^2) + 2(2x - x^2) + x^2) = 2a \cdot e^{-x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_{p2} = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$$

$s(x) = 3 - e^{-x} = s_1(x) - s_2(x)$:

$$y_p = y_{p1} - y_{p2} = 3 - \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = y_p + y_h = 3 - \frac{1}{2}x^2 e^{-x} + C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot xe^{-x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 4.
a) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y'' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Spezielle komplexe Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$z_p = a \cdot xe^{2ix} \quad \Rightarrow \quad z_p' = a \cdot e^{2ix} + 2ia \cdot xe^{2ix}$$

$$\Rightarrow \quad z_p'' = 2ia \cdot e^{2ix} + 2ia \cdot xe^{2ix} + (2i)^2 a \cdot xe^{2ix} = 4ia \cdot e^{2ix} - 4a \cdot xe^{2ix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2ix} = z_p'' + 4z_p = a \cdot e^{2ix} \cdot (4i - 4x + 4x) = 4ia \cdot e^{2ix} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4} i$$

$$\Rightarrow \quad z_p = -\frac{1}{4} i \cdot xe^{2ix} = -\frac{1}{4} ix \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) = \frac{1}{4} x \cdot (\sin 2x - i \cos 2x)$$

Spezielle (reelle) Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\sin 2x - 3\cos 2x = \mathrm{Im}(e^{2ix}) - 3\mathrm{Re}(e^{2ix})$$

$$\Rightarrow \quad y_p = \mathrm{Im}(z_p) - 3\mathrm{Re}(z_p) = \frac{1}{4} x \cdot (-\cos 2x - 3 \sin 2x)$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y = -\frac{1}{4} x \cdot (\cos 2x + 3 \sin 2x) + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = -\frac{1}{4}(\cos 2x + 3 \sin 2x) - \frac{1}{4} x \cdot (-2 \sin 2x + 6 \cos 2x) - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$$

$$1 = y(0) = C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

$$0 = y'(0) = -\frac{1}{4} + 2C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4} x \cdot (\cos 2x + 3 \sin 2x) + \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x$$

b) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y'' - y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 + C_2 e^x$$

Spezielle Lösung für Störglied $s_1(x) = x$:

$$y_{p1} = x \cdot (a + b \cdot x) = a \cdot x + b \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad y_{p1}' = a + 2b \cdot x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 2b$$

$$\Rightarrow \quad x = y_{p1}'' - y_{p1}' = 2b - (a + 2b \cdot x) \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}\ , \ a = 2b = -1$$

$$\Rightarrow \quad y_{p1} = -x - \frac{1}{2} x^2$$

Spezielle komplexe Lösung für Störglied $\tilde{s}_2(x) = e^{(2+i)x}$:

$$z_{p2} = a \cdot e^{(2+i)x} \quad \Rightarrow \quad z'_{p2} = (2+i)a \cdot e^{(2+i)x}$$

$$\Rightarrow \quad z''_{p2} = (2+i)^2 a \cdot e^{(2+i)x} = (3+4i)a \cdot e^{(2+i)x}$$

$$\Rightarrow \quad e^{(2+i)x} = z''_{p2} - z'_{p2} = a \cdot e^{(2+i)x} \cdot (3+4i-2-i) = (1+3i)a \cdot e^{(2+i)x}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{1+3i} = \frac{1}{10}(1-3i)$$

$$z_{p2} = \frac{1}{10}(1-3i) \cdot e^{(2+i)x} = \frac{1}{10}(1-3i) \cdot e^{2x}(\cos x + i \sin x)$$

Spezielle (reelle) Lösung für Störglied $s_2(x) = e^{2x} \cos x$:

$$e^{2x} \cos x = Re(e^{(2+i)x}) \quad \Rightarrow \quad y_{p2} = Re(z_{p2}) = \frac{1}{10} \cdot e^{2x}(\cos x + 3 \sin x)$$

Spezielle Lösung für Störglied $s(x) = x + e^{2x} \cos x = s_1(x) + s_2(x)$:

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}e^{2x} \cdot (\cos x + 3 \sin x)$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y = -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}e^{2x} \cdot (\cos x + 3 \sin x) + C_1 + C_2 e^x \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = -1 - x + \frac{1}{5}e^{2x}(\cos x + 3 \sin x) + \frac{1}{10}e^{2x}(-\sin x + 3 \cos x) + C_2 e^x$$

$$0 = y'(0) = -1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

$$0 = y(0) = \frac{1}{10} + C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{5} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}e^{2x}(\cos x + 3 \sin x)$$

c) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow \quad y_h = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_p = a \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y'_p = 2a \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y''_p = 4a \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x} = y''_p - 2y'_p + 5y_p = a \cdot e^{2x} \cdot (4 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1) = 5a \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{1}{5}e^{2x}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y = \frac{1}{5}e^{2x} + C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = \frac{2}{5}e^{2x} + C_1 \cdot (e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x) + C_2 \cdot (e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x)$$

$$0 = y(0) = \frac{1}{5} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{5}$$

$$0 = y'(0) = \frac{2}{5} + C_1 + 2C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{2}C_1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{1}{5}e^x \cos 2x - \frac{1}{10}e^x \sin 2x$$

Aufgabe 5.
a) Ein Vergleich mit dem prinzipiellen Aufbau der allgemeinen Lösung ergibt:

$e^{-3x} \sin 2x$ ist Lösung der homogenen Gleichung

$\Rightarrow$ $e^{(-3+2i)x}$ ist komplexe Lösung der homogenen Gleichung

$\Rightarrow$ $(-3+2i)$ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$\Rightarrow$ Das charakteristische Polynom ist (bis auf einen belanglosen Faktor)

$$(\lambda - (-3+2i))(\lambda - (-3-2i)) = (\lambda+3)^2 + 4 = \lambda^2 + 6\lambda + 13$$

$\Rightarrow$ Die homogene Differentialgleichung lautet $y'' + 6y' + 13y = 0$

Diese Differentialgleichung erfüllt die angegebene Bedingung. Sie ist homogen. Auch eine homogene Gleichung braucht also nur Ordnung 2 zu haben, um diese Bedingung zu erfüllen.

b) Ein Vergleich mit dem prinzipiellen Aufbau der allgemeinen Lösung ergibt:

e^{-x} ist Lösung der homogenen Gleichung

$\Rightarrow$ -1 ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms

Die zweite Nullstelle ist beliebig. Wir wählen etwa +1:

$\Rightarrow$ Das charakteristische Polynom ist $(\lambda+1)(\lambda-1) = \lambda^2 - 1$

$\Rightarrow$ Die homogene Differentialgleichung lautet $y'' - y = 0$

Die zugehörige Störfunktion ermitteln wir durch Einsetzen einer speziellen Lösung:

$$y_p = x^3 e^x \quad \Rightarrow$$

$$s(x) = y_p'' - y_p = (3x^2 e^x + x^3 e^x)' - x^3 e^x = e^x(6x + 3x^2 + 3x^2 + x^3 - x^3)$$

$$= 6x(1+x)e^x$$

Die Differentialgleichung $y'' - y = 6x(1+x)e^x$ erfüllt die angegebene Bedingung. (Dies ist aber nicht die einzige derartige Gleichung.) Setzen wir voraus, dass die Gleichung homogen ist, so muss das charakteristische Polynom die Nullstelle -1 (einfach) und die vierfache Nullstelle +1 haben. Ihre Ordnung ist also mindestens 5.

c) Zunächst schreiben wir die als Lösung gewünschten Funktionen um:

$$f_a(x) = \sin x + x \cdot e^{x+a} = \sin x + e^a \cdot xe^x$$

Ein Vergleich mit dem prinzipiellen Aufbau der allgemeinen Lösung ergibt:

xe^x ist Lösung der homogenen Gleichung

$\Rightarrow$ 1 ist doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$\Rightarrow$ Das charakteristische Polynom ist $(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$\Rightarrow$ Die homogene Differentialgleichung lautet $y'' - 2y' + y = 0$

Die zugehörige Störfunktion ermitteln wir durch Einsetzen einer speziellen Lösung:

$$y_p = \sin x \quad \Rightarrow \quad s(x) = y_p'' - 2y_p' + y_p = -\sin x - 2\cos x + \sin x = -2\cos x$$

Die Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = -2\cos x$ erfüllt die angegebene Bedingung. Setzen wir voraus, daß die Gleichung homogen ist, so muss das charakteristische Polynom die doppelte Nullstelle 1 und die beiden einfachen +i und -i haben. Ihre Ordnung ist also mindestens 4.

Aufgabe 6.

a) Durch Einsetzen von $y_1 = e^{2x}$ in die Differentialgleichung ergibt sich

$$0 = a \cdot 4e^{2x} + 2e^{2x} + e^{2x} = e^{2x}(4a+3) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Dies ist genau für $a = -\frac{3}{4}$ zu erfüllen. Das charakteristische Polynom und ihre Nullstellen sind dann

$$-\frac{3}{4}\lambda^2 + \lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{-\frac{3}{2}} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b) Durch Einsetzen von $y_2 = e^{-x}$ in die Differentialgleichung ergibt sich

$$0 = a \cdot e^{-x} - e^{-x} + e^{-x} = a \cdot e^{-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Dies ist genau für $a = 0$ zu erfüllen. Dadurch entsteht eine Gleichung erster Ordnung. Ihre allgemeine Lösung kann über die bekannte Lösung direkt angegeben werden

$$y = C \cdot e^{-x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

c) Damit $y_3 = x \cdot e^{\lambda x}$ eine Lösung ist, muss λ eine doppelte Nullstelle des charakterischen Polynoms sein:

$$a\lambda^2 + \lambda + 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$$

Es muss also $a = \frac{1}{4}$ und damit $\lambda = -2$ sein. Die allgemeine Lösung ist dann

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot xe^{-2x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

d) Die triviale Lösung $y \equiv 0$ ist stets Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung. Sie erfüllt auch die angegebenen Anfangsbedingungen.

Eine Lösung mit den geforderten Bedingungen gibt es also für alle $a \in \mathbb{R}$.

e) Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme hat jede (gutartige) Differentialgleichung **zweiter** Ordnung eine Lösung mit den angegebenen Anfangswerten.

Zu beachten ist aber, dass für $a = 0$ eine Gleichung **erster** Ordnung entsteht. Diese hat schon mit der ersten Bedingung $y(0) = 0$ eine eindeutige Lösung, nämlich $y \equiv 0$. Diese Lösung erfüllt die zweite Bedingung aber nicht.

Eine Lösung des Anfangswertproblems gibt es also genau für $a \neq 0$. Die Lösung ist dann eindeutig.