

Thema: Substitution bei Integralen

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

b) $\int (5 - 4x)^7 dx$

c) $\int \frac{x(3x+1)}{4x^3+2x^2+7} dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-9x^2}}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie

a) $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$

b) $\int_2^1 e^{2x-2} dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$

d) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{5-2x^3}}$

e) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

f) $\int_{-2}^2 x^3 \cdot \sqrt{1+x^2} dx$

Aufgabe 3. Prüfen Sie, welche der Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= a \sin t, & x &= a \cos t, \\ x &= a \sinh t, & x &= a \cosh t \end{aligned}$$

sich (mit $a = 2$) zur Berechnung der folgenden Integrale eignen.

a) $\int \frac{4 dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

b) $\int \frac{4 dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

c) $\int \frac{4 dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Ergänzung: Auch die Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sin t}, & x &= \frac{a}{\cos t}, \\ x &= \frac{a}{\sinh t}, & x &= \frac{a}{\cosh t}, \\ x &= a \tan t, & x &= \frac{a}{\tan t} \end{aligned}$$

eignen sich für je eines der Integrale. Welches? Vergleichen Sie die verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten.

Aufgabe 4. Geben Sie für nachstehende Funktionen eine Stammfunktion an, welche an der Stelle 0 den Wert 1 hat:

a) $x\sqrt{x+1} + |x|$

b) $\frac{\sqrt{\sin x} \cdot \cos^4 x + \sin x}{\cos^3 x}$

c) $\frac{2 \sin x + \sin 2x}{2 + \cos x}$

Aufgabe 5. Prüfen Sie, welche der folgenden Integrale den gleichen Wert besitzen. Ordnen Sie die Integrale dann der Größe nach.

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+1} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx,$$

$$\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x^2+1} dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{e^{-x}}{x^2+1} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x^2+1} dx, \quad \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^2+1} dx,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x^2+1} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{x^2+1} dx$$