**Aufgabe 1.**

a) Für $x > 0$ und $x \neq 1$ ist die zu integrierende Funktion stetig und es gilt

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \boxed{\begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$

b) Der Integrand ist für alle reellen x stetig und es gilt

$$\int (5-4x)^7 \; dx = \boxed{\begin{array}{c} u = 5-4x \\ du = -4\,dx \end{array}} = -\frac{1}{4}\int u^7\,du = -\frac{1}{32}u^8 + C$$

$$= -\frac{1}{32}\,(5-4x)^8 + C$$

c) Für $4x^3 + 2x^2 + 7 \neq 0$ ist der Integrand stetig und es gilt

$$\int \frac{x\,(3x+1)}{4x^3+2x^2+7}\,dx = \int \frac{3x^2+x}{4x^3+2x^2+7}\,dx = \boxed{\begin{array}{c} u = 4x^3+2x^2+7 \\ du = \left(12x^2+4x\right)\,dx \end{array}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln\left|4x^3+2x^2+7\right| + C$$

d) Für $x \neq 0$ und $|x| < \frac{1}{3}$ ist der Integrand stetig und es gilt

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-9x^2}} = \boxed{\begin{array}{ll} x = \frac{1}{3}\sin u & -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{1}{3}\cos u\,du & \end{array}} = \int \frac{\frac{1}{3}\cos u\,du}{\frac{1}{9}\cdot\sin^2 u\cdot\cos u}$$

$$= 3\int \frac{du}{\sin^2 u} = -3\cot u + C = -3\cdot\frac{\cos u}{\sin u} + C = -3\cdot\frac{+\sqrt{1-(3x)^2}}{3x} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1-9x^2}}{x} + C$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\sqrt{1-9x^2}}{x}\right) = -\frac{\frac{-18x}{2\sqrt{1-9x^2}}\cdot x - 1\cdot\sqrt{1-9x^2}}{x^2} = -\frac{-9x^2-\left(1-9x^2\right)}{x^2\sqrt{1-9x^2}}$$

$$= \frac{1}{x^2\sqrt{1-9x^2}}$$

**Aufgabe 2.**

a) Für das unbestimmte Integral gilt:

$$\int \sin 3x\,dx = \boxed{\begin{array}{c} u = 3x \\ du = 3\,dx \end{array}} = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

Das bestimmte Integral ergibt sich durch Einsetzen der Grenzen:

$$\int_0^\pi \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\Big[\cos 3x\Big]_0^\pi = -\frac{1}{3}\cdot(\cos 3\pi - \cos 0) = -\frac{1}{3}\cdot(-1-1) = \frac{2}{3}$$

b) Der Integrand ist überall stetig und es gilt

$$\int_2^1 e^{2x-2}\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = 2x-2 & x=1 \Rightarrow u=0 \\ du = 2\,dx & x=2 \Rightarrow u=2 \end{array}} = \int_2^0 e^u \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}e^u\Big|_2^0$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^0 - e^2\right) = \frac{1}{2}\left(1-e^2\right)$$

c) Der Integrand ist überall stetig (der Nenner kann nicht Null werden) und es gilt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{2+\cos x} = \boxed{\begin{array}{c|c} u = 2+\cos x & x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=2 \\ du = -\sin x\,dx & x=0 \Rightarrow u=3 \end{array}} = \int_3^2 \frac{-\,du}{u}$$

$$= \Big[-\ln|u|\Big]_3^2 = -\ln 2 + \ln 3 = \ln\frac{3}{2}$$

d) Der Integrand ist auf dem Integrationsintervall $[0,1]$ stetig und es gilt dort

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{5-2x^3}} = \boxed{\begin{array}{c} u = 5-2x^3 \\ du = -6x^2\,dx \end{array}} = \int \frac{-\frac{1}{6}\,du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{1/2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{u} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{5-2x^3} + C$$

Für das bestimmte Integral ergibt sich daher

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{5-2x^3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{5-2x^3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$$

e) Der Integrand ist auf dem Integrationsintervall $[1,2]$ stetig und es gilt dort

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \boxed{\begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array}} = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

Damit berechnet sich das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln^2 x\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\ln^2 2$$

f) Die Funktion $f(x) = x^3\cdot\sqrt{1+x^2}$ ist ungerade, denn

$$f(-x) = (-x)^3\cdot\sqrt{1+(-x)^2} = -x^3\cdot\sqrt{1+x^2} = -f(x)$$

Daher ist

$$\int_{-2}^2 x^3\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx = 0$$

**Aufgabe 3.**
a) Der Definitionsbereich des Integranden $\frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ ist $D = (-2, 2) \setminus \{0\}$. Die Substitutionen $x = 2\sin t$ und $x = 2\cos t$ führen beide zum Ziel. Im ersten Fall ist

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2|\cos t|$$

Man erkennt an dieser Umformung, warum gerade $a = 2$ (oder $a = -2$) gewählt werden muss. Für $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, was den ganzen Definitionsbereich von $x$ abdeckt, ist $\cos t > 0$ und die Betragsstriche können weggelassen werden.

$$\int \frac{4\;dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \boxed{\begin{array}{c} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{array}} = \int \frac{4\cdot 2\cos t}{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}dt = \int \frac{1}{\sin^2 t}dt = -\cot t + C$$

$$= -\frac{\cos t}{\sin t} + C = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}{\frac{x}{2}} + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Analog ist für $x = 2\cos t$ mit $t \in (0, \pi)$ (was den ganzen Definitionsbereich von $x$ abdeckt)

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\cos^2 t} = 2\sqrt{1-\cos^2 t} = 2\sqrt{\sin^2 t} = 2|\sin t| = 2\sin t$$

$$\int \frac{4\;dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \boxed{\begin{array}{c} x = 2\cos t \\ dx = -2\sin t\,dt \end{array}} = \int \frac{4\cdot(-2)\sin t}{4\cos^2 t\cdot 2\sin t}dt = \int \frac{-1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= -\tan t + C = -\frac{\sin t}{\cos t} + C = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}{\frac{x}{2}} + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Auch möglich ist die Substitution $x = \frac{2}{\cosh t}$, allerdings nur für $x > 0$. Die beiden anderen Substitutionen sind deshalb vorzuziehen. Trotzdem soll gezeigt werden, wie es ginge. Für $t > 0$, was alle $x > 0$ im Definitionsbereich abdeckt, ist

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-\frac{4}{\cosh^2 t}} = 2\sqrt{1-\frac{1}{\cosh^2 t}} = 2\sqrt{\frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh^2 t}} = 2\sqrt{\frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}} =$$

$$= 2\frac{|\sinh t|}{\cosh t} = 2\frac{\sinh t}{\cosh t}$$

$$\int \frac{4\;dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \boxed{\begin{array}{c} x = \frac{2}{\cosh t} \\ dx = -2\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\,dt \end{array}} = \int \frac{4\cdot(-2)\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}}{4\frac{1}{\cosh^2 t}\cdot 2\frac{\sinh t}{\cosh t}}dt = -\int \cosh t\,dt =$$

$$= -\sinh t + C = -\sqrt{\cosh^2 t - 1} + C = -\sqrt{\frac{4}{x^2} - 1} + C = -\sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Wie gesagt: Das gilt zunächst nur für $x > 0$, was in der letzten Umformung auch benutzt wurde. Für $x < 0$ könnte die Substitution $x = -\frac{2}{\cosh t}$ verwendet werden. Wie in dieser

Aufgabe sind aber Einschränkungen oft nur für die Herleitung der Formel nötig, das Ergebnis stimmt auf dem gesamten Definitionsbereich. Dies kann durch Ableiten bestätigt werden:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right) = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{4-x^2}-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\cdot\frac{-x^2-(4-x^2)}{x(4-x^2)} = \frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

**Hinweis:** Alle Substitutionen liefern die gleiche Stammfunktion. Gerade im Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen führen unterschiedliche Methoden oft zu Stammfunktionen, welche sich um eine additive Konstante unterscheiden.

Die anderen Substitutionen sind nicht anwendbar oder bringen keinen Fortschritt. Nicht anwendbar ist beispielsweise die Substitution $x = \frac{2}{\sin t}$, weil dabei $|x| \geq 2$ wäre, also nicht dem Defintionsbereich von $x$ entspricht.

b) Der Definitionsbereich des Integranden $\frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ ist $D = (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$. Für $x \in (2,\infty)$ führt die Substitution $x = 2\cosh t$ mit $t \in (0,\infty)$ zum Ziel.

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\cosh^2 t - 4} = 2\sqrt{\cosh^2 t - 1} = 2\sqrt{\sinh^2 t} = 2|\sinh t| = 2\sinh t$$

$$\int \frac{4\ dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \boxed{\begin{array}{c} x = 2\cosh t \\ dx = 2\sinh t\,dt \end{array}} = \int \frac{4\cdot 2\sinh t}{4\cosh^2 t\cdot 2\sinh t}dt = \int \frac{1}{\cosh^2 t}dt =$$

$$= \tanh t + C = \frac{\sinh t}{\cosh t} + C = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}}{\frac{x}{2}} + C = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Für $x \in (-\infty,-2)$ führt analog die Substitution $x = -2\cosh t$ mit $t \in (0,\infty)$ zum Ziel. Einfacher ist es, durch Ableiten nachzuweisen, dass das ermittelte Ergebnis für alle $x$ richtig ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\cdot\frac{x^2-(x^2-4)}{x(x^2-4)} = \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}$$

Auch zum Ziel führen die Substitutionen $x = \frac{2}{\sin t}$ und $x = \frac{2}{\cos t}$. Für $x = \frac{2}{\sin t}$ mit $t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ist

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\sin^2 t}-4} = 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1} = 2\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = 2\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = 2\frac{\cos t}{|\sin t|}$$

Um den Betrag los zu werden, ist eine Beschränkung auf $t \in (0,\frac{\pi}{2})$ (und damit $x > 0$) nötig.

$$\int \frac{4\ dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \boxed{\begin{array}{c} x = \frac{2}{\sin t} \\ dx = -2\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt \end{array}} = \int \frac{4\cdot(-2)\frac{\cos t}{\sin^2 t}}{4\frac{1}{\sin^2 t}\cdot 2\frac{\cos t}{\sin t}}dt = -\int \sin t\,dt =$$

$$= \cos t + C = \sqrt{1-\sin^2 t} + C = \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} + C = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Wie bei der vorigen Substitution $x = 2\cosh t$ wird nun durch Ableiten gezeigt, dass auf die Einschränkung $x > 0$ verzichtet werden kann.

Analog funktioniert die Substitution $x = \frac{2}{\cos t}$ mit $t \in (0, \pi)$

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = 2\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = 2\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = 2\frac{\sin t}{|\cos t|}$$

Um den Betrag los zu werden, ist wieder eine Beschränkung auf $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ (und damit $x > 0$) nötig.

$$\int \frac{4\;dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \boxed{\begin{array}{c} x = \frac{2}{\cos t} \\ dx = 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt \end{array}} = \int \frac{4 \cdot 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{4\frac{1}{\cos^2 t} \cdot 2\frac{\sin t}{\cos t}} dt = \int \cos t\,dt =$$

$$= \sin t + C = \sqrt{1-\cos^2 t} + C = \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} + C = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Wieder wird durch Ableiten die Gültigkeit für alle $x \in D$ nachgewiesen.

c) Hier führen die restlichen vier Substitutionen $x = 2\sinh t$, $x = 2\tan t$, $x = \frac{2}{\sinh t}$ und $x = \frac{2}{\tan t}$ zum Ziel. Der Definitionsbereich des Integranden $\frac{4}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x = 2\sinh t$ ist

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4\sinh^2 t + 4} = 2\sqrt{\sinh^2 t + 1} = 2\sqrt{\cosh^2 t} = 2\cosh t$$

$$\int \frac{4\;dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \boxed{\begin{array}{c} x = 2\sinh t \\ dx = 2\cosh t\,dt \end{array}} = \int \frac{4 \cdot 2\cosh t}{4\sinh^2 t \cdot 2\cosh t} dt = \int \frac{1}{\sinh^2 t} dt =$$

$$= -\coth t + C = -\frac{\cosh t}{\sinh t} + C = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}}{\frac{x}{2}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Bei der Substitution $x = 2\tan t$ mit $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ergibt sich

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4\tan^2 t + 4} = 2\sqrt{\tan^2 t + 1} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{2}{\cos t}$$

$$\int \frac{4\;dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \boxed{\begin{array}{c} x = 2\tan t \\ dx = \frac{2}{\cos^2 t}\,dt \end{array}} = \int \frac{4 \cdot \frac{2}{\cos^2 t}}{4\tan^2 t \cdot \frac{2}{\cos t}} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt =$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = 2\sin t \\ du = \cos t\,dt \end{array}} = \int \frac{du}{u^2} = -u^{-1} + C = \frac{-1}{\sin t} + C = \frac{-1}{\sin\arctan x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Überführung in die Form des ersten Ergebnisses ist etwas aufwändiger:

$$\int \frac{4\;dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{-1}{\sin t} + C = \frac{-1}{\tan t \cdot \cos t} + C = -\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}{\tan t} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t} + C = -\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Für $x = \frac{2}{\sinh t}$ ist

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{\frac{4}{\sinh^2 t} + 4} = 2\sqrt{\frac{1}{\sinh^2 t} + 1} = 2\sqrt{\frac{1+\sinh^2 t}{\sinh^2 t}} = 2\sqrt{\frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t}} = 2\frac{\cosh t}{|\sinh t|}$$

Im Gegensatz zu den ersten beiden Substitutionen wäre jetzt eine Beschränkung auf $x > 0$ (oder $x < 0$) notwendig. Die Berechnung wäre dann aber kein Problem. Für $x = \frac{2}{\tan t}$ ist

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{\frac{4}{\tan^2 t} + 4} = 2\sqrt{\frac{1}{\tan^2 t} + 1} = 2\sqrt{\frac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t \cdot \tan^2 t}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} = 2\frac{1}{|\sin t|}$$

Auch hier wäre jetzt um den Betrag los zu werden eine Beschränkung des $x$-Bereiches nötig.

**Aufgabe 4.**

a) Für den ersten Summanden ergibt sich

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \boxed{\begin{array}{c} u = x+1 \\ du = dx \end{array}} = \int (u-1)\sqrt{u}\,du = \int \left(u\sqrt{u} - \sqrt{u}\right)\,du =$$

$$= \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\,du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Für den zweiten Summanden gilt

$$\int |x|\,dx = \int \left\{ \begin{array}{rl} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x \leq 0 \end{array} \right. dx = \left\{ \begin{array}{rl} \frac{x^2}{2}\,, & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2}\,, & x \leq 0 \end{array} \right. + C = \frac{x \cdot |x|}{2} + C$$

Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist

$$F_1(x) = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{x \cdot |x|}{2}$$

$$F_1(0) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + 0 = -\frac{4}{15}$$

Eine Stammfunktion $F(x)$ mit $F(0) = 1$ ist somit

$$F(x) = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{x \cdot |x|}{2} + \frac{19}{15}$$

b) Der Integrand wird in zwei Summanden aufgespalten:

$$\int \frac{\sqrt{\sin x} \cdot \cos^4 x + \sin x}{\cos^3 x}\,dx = \int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

$$\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \, dx = \boxed{\begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array}} = \int \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx = \boxed{\begin{array}{c} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array}} = -\int \frac{1}{u^3} \, du = \frac{1}{2} u^{-2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

Eine Stammfunktion ist also

$$F_1(x) = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$F_1(x) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Die gesuchte Stammfunktion ist

$$F(x) = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}$$

c) Mit dem Additionstheorem $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ergibt sich

$$\int \frac{2\sin x + \sin 2x}{2 + \cos x} \, dx = \int \frac{2\sin x + 2\sin x \cos x}{2 + \cos x} \, dx = \int \frac{2\sin x \cdot (1 + \cos x)}{2 + \cos x} \, dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = 2 + \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array}} = -2 \int \frac{u - 1}{u} \, du = -2 \int (1 - \frac{1}{u}) \, du = -2(u - \ln |u|) + C =$$

$$= -2(2 + \cos x) + 2\ln(2 + \cos x) + C$$

Eine Stammfunktion ist

$$F_1(x) = -2\cos x + 2\ln(2 + \cos x)$$

$$F_1(0) = -2 + 2\ln 3$$

Die gesuchte Stammfunktion ist demnach

$$F(x) = -2\cos x + 2\ln(2 + \cos x) + 3 - 2\ln 3$$

**Aufgabe 5.** Durch die Substitution $u = -x$ (oder Symmetrie-Überlegungen) gehen je zwei Integrale ineinander über:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = -x & x = 0 \ \to u = 0 \\ du = -dx & x = -1 \to u = 1 \end{array}} = \int_{1}^{0} \frac{-1}{u^2 + 1} \, du = \int_{0}^{1} \frac{1}{u^2 + 1} \, du$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{x^2 + 1} \, dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = -x & x = 0 \ \to u = 0 \\ du = -dx & x = -1 \to u = 1 \end{array}} = \int_{1}^{0} \frac{-e^{-u}}{u^2 + 1} \, du = \int_{0}^{1} \frac{e^{-u}}{u^2 + 1} \, du$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} \, dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = -x & x = 0 \ \to u = 0 \\ du = -dx & x = -1 \to u = 1 \end{array}} = \int_{1}^{0} \frac{-e^{u}}{u^2 + 1} \, du = \int_{0}^{1} \frac{e^{u}}{u^2 + 1} \, du$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-x}}{x^2+1}\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u=-x & x=1 \ \to u=-1 \\ du=-dx & x=-1 \to \ \ u=1 \end{array}} = \int_{1}^{-1} \frac{-e^u}{u^2+1}\,du = \int_{-1}^{1} \frac{e^u}{u^2+1}\,du$$

Für alle $x \geq 0$ gilt

$$\frac{e^{-x}}{x^2+1} \quad \leq \quad \frac{1}{x^2+1} \quad \leq \quad \frac{e^{x}}{x^2+1}$$

Wegen der Monotonie des bestimmten Integrals bezüglich des Integranden ergibt sich

$$\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{x^2+1}\,dx \quad \leq \quad \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx \quad \leq \quad \int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx$$

Für $x \geq \frac{1}{2}$ gilt

$$\frac{e^{x}}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \geq \frac{e^{\frac{1}{2}}-1}{x^2+1} \geq \frac{1.5-1}{1.25} = 0.4$$

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{e^{-x}}{x^2+1} \geq \frac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{x^2+1} \geq \frac{1-0.8}{1.25} = 0.16$$

Deshalb ist

$$\int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx - \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx \geq \frac{1}{2}\cdot 0.4 > 0$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{x^2+1}\,dx \geq \frac{1}{2}\cdot 0.16 > 0$$

Für $-1 \leq x \leq 1$ ist

$$\frac{e^{x}}{x^2+1} \geq \frac{e^{-1}}{2} \geq \frac{1}{6}$$

Hieraus ergibt sich

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx \geq \frac{1}{6} + \int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx > \int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx$$

Damit ist die folgende größenmäßige Anordnung nachgewiesen:

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{x^2+1}\,dx \quad < \quad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx \quad <$$

$$< \quad \int_{-1}^{0} \frac{e^{-x}}{x^2+1}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx \quad < \quad \int_{-1}^{1} \frac{e^{-x}}{x^2+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^{x}}{x^2+1}\,dx$$