Thema: Rationale Funktionen

Aufgabe 1.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameters $a > 0$ die Nullstellen und Polstellen der Funktion

$$f_a(x) = \frac{1 - a \cdot x^3}{5x^2 - \frac{1}{2}x - 1}$$

b) Wie muss a gewählt werden, damit die Funktion durch den Punkt $P(-5, \frac{2}{3})$ geht? Wo schneidet eine horizontale Gerade durch P diese Funktion sonst noch?

c) Berechnen Sie für $a = 8$ die Asymptote für $x \to \pm\infty$ und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 2.
Zerlegen Sie in Partialbrüche:

a) $\dfrac{x^5}{x^4 - 1}$

b) $\dfrac{3x^3 - 2x}{4x^4 - 17x^2 + 4}$

c) $\dfrac{5x^2 - 41x + 50}{x^3 - 10x^2 + 25x}$

Aufgabe 3. Vorgelegt sei die rationale Funktion

$$q(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

Skizzieren Sie die Funktion f mit

a) $f(x) = q(x)$

b) $f(x) = q\left(x^2\right)$

c) $f(x) = q\left(3 - x^2\right)$

d) $f(x) = q^2(x)$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2 \cdot q^2(x)$

Thema: Rekursive Folgen

Aufgabe 4. WS13/14 *(28 Punkte)*
Die vom Parameter $a > 0$ abhängige Folge $\langle x_n \rangle$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 3$ und $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $x_n > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Für welchen Wert a_0 von a ist die Folge $\langle x_n \rangle$ konstant? Begründen Sie, dass $x_1 < x_0$ für $a < a_0$ und $x_1 > x_0$ für $a > a_0$.

c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge $\langle x_n \rangle$ für $a < a_0$ streng monoton fallend ist.

d) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ für $a < a_0$.

e) Wie verhält sich die Folge $\langle x_n \rangle$ für $a > a_0$?

Thema: Häufungswerte von Folgen

Aufgabe 5. Zu untersuchen sind die Folgen $< a_n >$ und $< |a_n| >$ mit

$$a_n = \sin\left[\frac{\pi}{3} \cdot \left(n + \frac{1}{n}\right)\right]$$

a) Geben Sie das Supremum und das Infimum der beiden Folgen an und prüfen Sie jeweils, ob es angenommen wird.

b) Welche Häufungswerte haben die beiden Folgen? Bestimmen Sie jeweils den Limes Superior und den Limes Inferior.

Hinweis: Untersuchen Sie die sechs Teilfolgen $< a_{6n} >$, $< a_{6n-1} >$, ... $< a_{6n-5} >$. Lassen Sie sich dazu zunächst mit *Maple* die ersten Folgenglieder anzeigen.