Aufgabe 1.

a) Zunächst werden die Nullstellen von Zähler- und Nenner-Polynom berechnet. Nullstellen des Zählers:

$$1 - ax^3 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

Nullstellen des Nenners:

$$5x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20}}{10} \qquad = \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} \end{cases}$$

► Für $a \neq 8$ hat $f_a(x)$ die Nullstelle $x_0 = a^{-\frac{1}{3}}$ und die beiden Polstellen $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{2}{5}$.

Für $a = 8$ ist $x_0 = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = x_1$. Daher sind zusätzliche Überlegungen nötig:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f_a(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1 - 8x^3}{5x^2 - \frac{1}{2}x - 1}}_{\frac{0}{0}} \stackrel{(?)}{=} \lim_{x \to \frac{1}{2}} \underbrace{\frac{-24x^2}{10x - \frac{1}{2}}}_{\frac{-6}{4.5}} = -\frac{4}{3}$$

Bei x_1 ist also kein Pol, sondern eine hebbare Unstetigkeit.

► Für $a = 8$ hat $f_a(x)$ also keine Nullstelle und eine einzige Polstelle bei $x_2 = -\frac{2}{5}$.

b) Durch Einsetzen des Punktes P erhalten wir eine Gleichung zur Bestimmung von a:

$$\frac{2}{3} = \frac{1 + 125 \cdot a}{125 + \frac{5}{2} - 1} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{2}{3}$$

Für die Schnittpunkte mit der Geraden ergibt sich eine Gleichung dritten Grades:

$$\frac{2}{3} \stackrel{!}{=} \frac{1 - \frac{2}{3}x^3}{5x^2 - \frac{1}{2}x - 1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{3}\left(5x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right) = 1 - \frac{2}{3}x^3$$

$$\Rightarrow \qquad 2x^3 + 10x^2 - x - 5 = 0$$

Mit dem Horner-Schema spalten wir die bekannte Lösung -5 ab:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 10 & -1 & -5 \\ -5 & & -10 & 0 & 5 \\ \hline & 2 & 0 & -1 & \underline{\underline{0}} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

► Für $a = \frac{2}{3}$ geht die Funktion durch den Punkt P. Die weiteren Schnittpunkte mit der horizontalen Geraden durch P sind bei $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c) Zunächst wird die Funktionsgleichung durch Abspalten der gemeinsamen Nullstelle $x = 0.5$ in Zähler und Nenner vereinfacht:

$$\begin{array}{c|cccc} & -8 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & & -4 & -2 & -1 \\ \hline & -8 & -4 & -2 & \underline{\underline{0}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} & 5 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & & \frac{5}{2} & 1 \\ \hline & 5 & 2 & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

Folglich ist für $x \neq \frac{1}{2}$:

$$f_8(x) = \frac{1-8x^3}{5x^2-\frac{1}{2}x-1} = \frac{-8x^2-4x-2}{5x+2} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{4x^2+2x+1}{x+\frac{2}{5}}$$

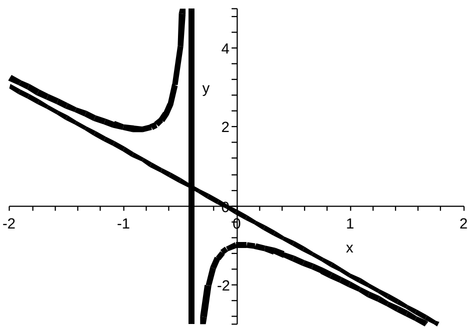
Da im Nenner nur noch ein linearer Ausdruck steht, kann die Bestimmung der Asymptote ebenfalls mit Horner geschehen:

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & 2 & 1 \\ -\frac{2}{5} & & -\frac{8}{5} & -\frac{4}{25} \\ \hline & 4 & \frac{2}{5} & \underline{\underline{\frac{21}{25}}} \end{array}$$

$$f_8(x) = -\frac{2}{5}\cdot\left[4x+\frac{2}{5}+\frac{21}{25}\cdot\frac{1}{x+\frac{2}{5}}\right] = -\frac{8}{5}x-\frac{4}{25}-\frac{42}{125}\cdot\frac{1}{x+\frac{2}{5}}$$

► Die Asymptote für $x \to \pm\infty$ ist daher $y = -\frac{8}{5}x - \frac{4}{25}$

Bei nebenstehendem Schaubild ist zu beachten, dass die Funktion an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ nicht definiert ist. (Sie kann dort aber offenbar stetig ergänzt werden.)



Aufgabe 2.
a) Zunächst wird der Nenner in Linearfaktoren zerlegt:

$$x^4-1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$$

Als nächstes wird der ganzrationale Anteil abgespalten:

$$\begin{array}{cc|c} x^5 & & :\left(x^4-1\right) \\ x^5 & -x & x \\ \hline & x & \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^5}{x^4-1} = x + \frac{x}{x^4-1}$$

Der echt gebrochen rationale Anteil wird gemäß folgendem Ansatz zerlegt:

$$\frac{x}{x^4-1} \stackrel{!}{=} \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+i}+\frac{d}{x-i} \qquad \Rightarrow$$

$$x = a(x-1)(x+i)(x-i)+b(x+1)(x+i)(x-i)+c(x+1)(x-1)(x-i)$$
$$+d(x+1)(x-1)(x+i)$$

Die Parameter a, b, c, d werden durch Einsetzen der Nenner-Nullstellen bestimmt:

$$\begin{array}{lllll}
x=-1: & -1=a(-2)(-1+i)(-1-i) & \Rightarrow & a=\frac{1}{4} \\
x=1: & 1=b(2)(1+i)(1-i) & \Rightarrow & b=\frac{1}{4} \\
x=-i: & i=c(-i+1)(-i-1)(-2i) & \Rightarrow & c=-\frac{1}{4} \\
x=i: & i=d(i+1)(i-1)(2i) & \Rightarrow & d=-\frac{1}{4}
\end{array}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet demnach:

$$\frac{x^5}{x^4-1}=x+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+i}+\frac{-\frac{1}{4}}{x-i}$$

Bei der reellen Partialbruchzerlegung werden konjugiert komplexe Nullstellen zusammengefasst:

$$\frac{x^5}{x^4-1}=x+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}\left[(x-i)+(x+i)\right]}{x^2+1}=x+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}$$

b) Zunächst wird der Nenner wieder in Linearfaktoren zerlegt. Dies gelingt mit der Substitution $u=x^2$:

$$4x^4-17x^2+4\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad 4u^2-17u+4=0 \quad\Rightarrow\quad u_1=4,\quad u_2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm 2\ ,\quad x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad 4x^4-17x^2+4=4(x+2)(x-2)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$$

Die Funktion ist echt gebrochen rational und kann direkt gemäß folgendem Ansatz zerlegt werden:

$$\frac{3x^3-2x}{4x^4-17x^2+4}\overset{!}{=}\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+\frac{1}{2}}+\frac{d}{x-\frac{1}{2}} \qquad\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x=\ & a(x-2)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+b(x+2)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})\\
&+c(x+2)(x-2)(x-\frac{1}{2})+d(x+2)(x-2)(x+\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Die Parameter a, b, c, d werden durch Einsetzen der Nenner-Nullstellen bestimmt:

$$\begin{array}{lllll}
x=-2: & -3\cdot 2+1=a(-4)(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) & \Rightarrow & a=\frac{1}{3} \\
x=2: & 3\cdot 2-1=b(4)(\frac{5}{2})(\frac{3}{2}) & \Rightarrow & b=\frac{1}{3} \\
x=-\frac{1}{2}: & -\frac{3}{32}+\frac{1}{4}=c(\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-1) & \Rightarrow & c=\frac{1}{24} \\
x=\frac{1}{2}: & \frac{3}{32}-\frac{1}{4}=d(\frac{5}{2})(-\frac{3}{2})(1) & \Rightarrow & d=\frac{1}{24}
\end{array}$$

Die Partialbruchzerlegung lautet demnach:

$$\frac{3x^3-2x}{4x^4-17x^2+4}=\frac{\frac{1}{3}}{x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{24}}{x+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{24}}{x-\frac{1}{2}}$$

c) Zunächst wird der Nenner in Linearfaktoren zerlegt:

$$x^3 - 10x^2 + 25x = x \cdot (x^2 - 10x + 25) = x(x-5)^2$$

Die Funktion ist echt gebrochen rational und kann direkt gemäß folgendem Ansatz zerlegt werden:

$$\frac{5x^2 - 41x + 50}{x^3 - 10x^2 + 25x} \overset{!}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x-5} + \frac{c}{(x-5)^2} \quad \Rightarrow$$

$$5x^2 - 41x + 50 = a(x-5)^2 + bx(x-5) + cx$$

Die Parameter a, b, c werden durch Einsetzen der Nenner-Nullstellen und einer weiteren (willkürlichen) Stelle bestimmt:

$$\begin{array}{lll} x=0: & 50 = a(-5)^2 & \Rightarrow \quad a = 2 \\ x=5: & 125 - 5\cdot 41 + 50 = c(5) & \Rightarrow \quad c = -6 \\ x=1: & 5 - 41 + 50 = a(-4)^2 + b(1)(-4) + c(1) & \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{4}(14 - 32 + 6) = 3 \end{array}$$

Die Partialbruchzerlegung lautet demnach:

$$\frac{5x^2 - 41x + 50}{x^3 - 10x^2 + 25x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-5} + \frac{-6}{(x-5)^2}$$

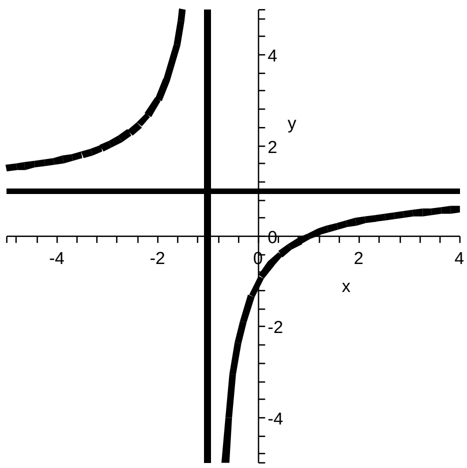
Aufgabe 3.

a) Es ist

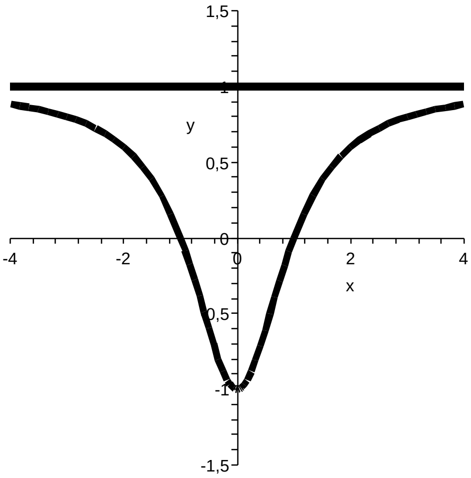
$$f(x) = q(x) = \frac{x-1}{x+1} =$$

$$= \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

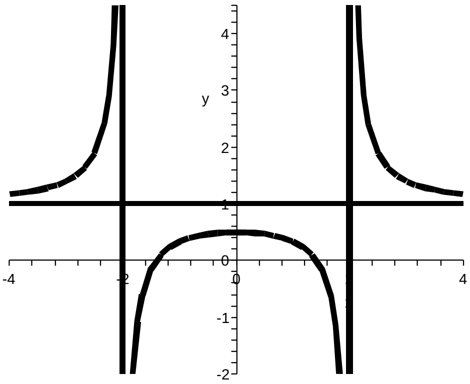
Die Funktion hat eine horizontale Asymptote bei $y = 1$ und eine vertikale Asymptote (Pol) bei $x = -1$.



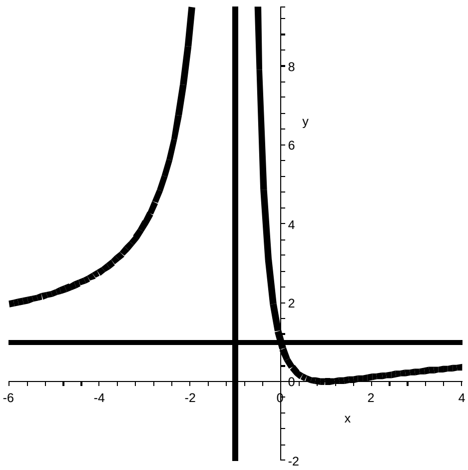
b) Die Funktion ist gerade. Wegen $W(x^2) = [0, \infty)$ ist nur der Bereich $x \geq 0$ von $q(x)$ relevant.



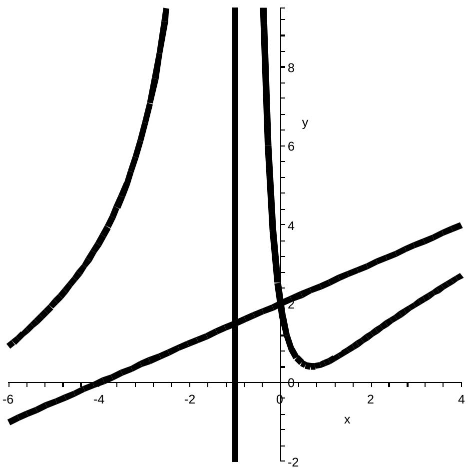
c) Die Funktion ist gerade. Wegen $W(3 - x^2) = (-\infty, 3]$ ist nur der Bereich $x \leq 3$ von $q(x)$ relevant.



d) Aus dem Pol mit Vorzeichenwechsel bei $x = -1$ wird ein Pol ohne Vorzeichenwechsel. Die Nullstelle von $q(x)$ bei $x = 1$ wird durch das Quadrieren zu einer doppelten Nullstelle, das heißt $f(x)$ hat dort eine waagrechte Tangente.



e) Die Funktion $q(x)$ hat eine waagrechte Asymptote bei $y = 1$. Deshalb hat $f(x)$ die Asymptote $y = \frac{1}{2}x + 2 \cdot 1^2 = \frac{1}{2}x + 2$



Aufgabe 4.

a) Es ist $x_0 = 3 > 0$ und aus $x_n > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$a + x_n > 0 \quad \text{und daraus} \quad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} > 0$$

b) Die Folge ist genau dann konstant, wenn alle Glieder gleich x_0 sind, also

$$\sqrt{a+3} \stackrel{!}{=} 3 \quad \stackrel{\text{beide Seiten } \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad a+3=9 \ \Leftrightarrow \ a=6$$

Es ist dann $\sqrt{a_0+x_0}=x_0$. Die Wurzel-Funktion ist streng monoton wachsend. Deshalb

$$a<a_0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\sqrt{a+x_0}<\sqrt{a_0+x_0}=x_0$$

$$a>a_0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\sqrt{a+x_0}>\sqrt{a_0+x_0}=x_0$$

c) Es wird bewiesen, dass $x_{n+1}<x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktions-Anfang: Es ist (wegen $a<a_0$) $x_1<x_0$ (siehe b)).

Induktions-Schritt: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ sei $x_{n+1}<x_n$. Dann ist wegen der strengen Monotonie der Wurzel-Funktion

$$x_{n+2}=\sqrt{a+x_{n+1}}<\sqrt{a+x_n}=x_{n+1}$$

d) Die Folge ist nach unten beschränkt (Aufgabenteil a)) und (im Falle $a<a_0$) monoton fallend (Aufgabenteil c)). Nach dem Hauptsatz für monotone Folgen ist die Folge konvergent. Der Grenzwert x ergibt sich als Fixpunkt der Rekursions-Vorschrift:

$$\sqrt{a+x} \stackrel{!}{=} x$$

Wegen $x_n>0$ für alle Glieder ist $x \geq 0$. Die vorige Gleichung ist deshalb äquivalent zu

$$a+x=x^2 \Leftrightarrow x^2-x-a=0 \Leftrightarrow x=\frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

Wegen $a>0$ ist $1+4a>1$. Damit sind die beiden Lösungen für x reell, aber nur eine erfüllt die Bedingung $x \geq 0$. Es ist somit

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$$

e) Analog zu c) ergibt sich, dass die Folge $\langle x_n \rangle$ ist für $a>a_0$ streng monoton wachsend ist. Die Frage ist, ob die Folge nach oben beschränkt ist. Dann wäre sie nämlich konvergent und müsste (siehe d)) den Grenzwert $x=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$ haben. Der Grenzwert x wäre dann eine obere Schranke.

Vermutung: Für alle Glieder gilt $x_n \leq x := \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$. Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

Induktions-Anfang: Es ist

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a_0}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+6}=3=x_0$$

Für $a > a_0$ ist wegen der Monotonie der Wurzel $x_0 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

Induktions-Schritt: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ sei $x_n \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$. Dann ist

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + a} + (\frac{1}{4} + a)} =$$

$$= \sqrt{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a})^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

Aufgabe 5. Für die Teilfolge $< b_n > := < a_{6n} >$ gilt

$$b_n = a_{6n} = \sin\left[\frac{\pi}{3} \cdot \left(6n + \frac{1}{6n}\right)\right] = \sin\left(2\pi \cdot n + \frac{\pi}{18n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{18n}\right)$$

Offenbar ist diese Teilfolge streng monoton fallend mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{6n} = 0 \ , \qquad \max_{n\in\mathbb{N}} a_{6n} = b_1 = a_6 = \sin\frac{\pi}{18} \ , \qquad \inf\{a_{6n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$$

Für die Teilfolge $< c_n > := < a_{6n-1} >$ ist

$$c_n = a_{6n-1} = \sin\left[\frac{\pi}{3} \cdot \left(6n - 1 + \frac{1}{6n-1}\right)\right] = \sin\left(2\pi \cdot n - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18n-3}\right) =$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18n-3}\right)$$

Diese Teilfolge ist ebenfalls streng monoton fallend mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{6n-1} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \ ,$$

$$\max_{n\in\mathbb{N}} a_{6n-1} = c_1 = a_5 = -\sin\frac{4\pi}{15} \ , \qquad \inf\{a_{6n-1} \mid n \in \mathbb{N}\} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Für die Teilfolge $< d_n > := < a_{6n-2} >$ ist

$$d_n = a_{6n-2} = \sin\left[\frac{\pi}{3} \cdot \left(6n - 2 + \frac{1}{6n-2}\right)\right] = \sin\left(2\pi \cdot n - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18n-6}\right) =$$

$$= \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18n-6}\right)$$

Diese Teilfolge ist streng monoton wachsend mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{6n-2} = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \ ,$$

$$\min_{n\in\mathbb{N}} a_{6n-2} = d_1 = a_4 = -\sin\frac{7\pi}{12} = -\sin\frac{5\pi}{12} \ , \qquad \sup\{a_{6n-2} \mid n \in \mathbb{N}\} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Für die Teilfolge $< e_n > := < a_{6n-3} >$ gilt

$$e_n = a_{6n-3} = \sin\left[\frac{\pi}{3}\cdot\left(6n-3+\frac{1}{6n-3}\right)\right] = \sin\left(-\pi+\frac{\pi}{18n-9}\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{18n-9}\right)$$

Diese Teilfolge ist streng monoton steigend mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{6n-3} = 0\ , \qquad \min_{n\in\mathbb{N}}\ a_{6n-3} = e_1 = a_3 = -\sin\frac{\pi}{9}\ , \qquad \sup\{a_{6n-3}\mid n\in\mathbb{N}\} = 0$$

Für die Teilfolge $< f_n > := < a_{6n-4} >$ ist

$$f_n = a_{6n-4} = \sin\left[\frac{\pi}{3}\cdot\left(6n-4+\frac{1}{6n-4}\right)\right] = \sin\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{18n-12}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{18n-12}\right)$$

Diese Teilfolge ist ebenfalls streng monoton steigend mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{6n-4} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ ,$$

$$\min_{n\in\mathbb{N}}\ a_{6n-4} = f_1 = a_2 = \sin\frac{5\pi}{6}\ , \qquad \sup\{a_{6n-4}\mid n\in\mathbb{N}\} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Für die Teilfolge $< g_n > := < a_{6n-5} >$ schließlich ist

$$g_n = a_{6n-5} = \sin\left[\frac{\pi}{3}\cdot\left(6n-5+\frac{1}{6n-5}\right)\right] = \sin\left(-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{18n-15}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18n-15}\right)$$

Die ersten zwei Glieder dieser Teilfolge sind

$$g_1 = a_1 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ , \qquad g_2 = a_7 = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{21}\right) > g_1$$

Ab diesem zweiten Glied ist die Teilfolge streng monoton fallend mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{6n-5} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ ,$$

$$\max_{n\in\mathbb{N}}\ a_{6n-5} = g_2 = a_7 = \sin\frac{8\pi}{21}\ , \qquad \inf\{a_{6n-5}\mid n\in\mathbb{N}\} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

a) Die Folge $< a_n >$ setzt sich aus den sechs untersuchten Teilfolgen zusammen. Das heißt, jedes Glied von $< a_n >$ kommt in (genau) einer der Teilfolgen vor. Das Infimum von $< a_n >$ ist also das kleinste der berechneten Infima, das Supremum das größte der berechneten Suprema:

$$\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \min\left\{0, -\sin\frac{\pi}{3}, -\sin\frac{5\pi}{12}, -\sin\frac{\pi}{9}, \sin\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{3}\right\} = -\sin\frac{5\pi}{12}$$

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \max\left\{\sin\frac{\pi}{18}, -\sin\frac{4\pi}{15}, -\sin\frac{\pi}{3}, 0, \sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{8\pi}{21}\right\} = \sin\frac{8\pi}{21}$$

Es ist

$$\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\sin\frac{5\pi}{12} = a_4$$

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sin\frac{8\pi}{21} = a_7$$

Sowohl Supremum, als auch Infimum werden demnach angenommen. Für die Folge $< |a_n| >$ ergibt sich

$$\inf\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = \min\left\{0, \sin\frac{4\pi}{15}, \sin\frac{\pi}{3}, 0, \sin\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{3}\right\} = 0$$

$$\sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = \max\left\{\sin\frac{\pi}{18}, \sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{5\pi}{12}, \sin\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{8\pi}{21}\right\} = \sin\frac{5\pi}{12}$$

Keines der Folgenglieder ist 0, das Infimum wird also nicht angenommen. Wegen

$$\sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = \sin\frac{5\pi}{12} = |a_4|$$

wird das Supremum angenommen.

b) Die sechs untersuchten Teilfolgen sind allesamt konvergent. Ihre insgesamt drei Grenzwerte $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 0 und $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sind Häufungswerte der Folge $< a_n >$. Weil jedes Glied von $< a_n >$ in einer der Teilfolgen vorkommt, gibt es keine weiteren Häufungswerte. Es ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ , \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Für die Folge $< |a_n| >$ ergibt sich entsprechend

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n| = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ , \qquad \liminf_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Dies sind die einzigen Häufungswerte der Folge $< |a_n| >$.