HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART

PRÜFUNGSLEISTUNG IM **SOMMERSEMESTER 2014**

FACH:	**Analysis A**	NAME:
DATUM:	15.07.2014	SEMESTER:
ZEIT:	08:30 - 10:30 Uhr	MATRIKELNUMMER:

PRÜFER: Erben, Preissler

HILFSMITTEL: ein Blatt DIN A4 beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben
Taschenrechner und jegliche kommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

Hinweise:

a) Sie sollten 5 karierte Doppelbögen und 1 Konzeptblatt erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.

b) Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein eigener Doppelbogen zu verwenden.

c) Bevor Sie beginnen müssen auf **allen** Doppelbögen Name, Semester und Aufgaben-Nummer eingetragen sein.

d) Alle karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen.

e) Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der Rechenweg nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Sätzen und Regeln muss begründet werden.

f) Diese Aufgabenblätter und das Konzeptpapier sollen nicht abgegeben werden.

g) Insgesamt gibt es 120 Punkte.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und die Nullstellen von f an.
Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

b) Berechnen Sie die Stellen der relativen Extrema von f .
Sind die relativen Extrema von f Minima oder Maxima?
Geben Sie den Wertebereich $W(f)$ an.

c) Besitzt die Einschränkung von f auf das Intervall $[1,\infty)$ eine Umkehrfunktion ? (mit Begründung)
(Berechnung der Umkehrfunktion ist nicht verlangt, falls sie existiert.)

d) Berechnen Sie alle Stammfunktionen von f .

e) Konvergiert das Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben ist die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion f_a mit $f_a(x) = \dfrac{\arctan(2x)}{x^a}$ für $x > 0$.

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x)$ mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} f_a(x)$ mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ für die 4 Fälle

$$a = 0\ ,\ a = 1\ ,\ 0 < a < 1\ ,\ a > 1\ .$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Vergleichskriteriums, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty f_a(x)\,dx$ für $a > 1$ konvergiert.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Die vom Parameter $b \in \mathbb{R}$ abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = b \qquad \text{mit} \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{4}(a_n^2 + 3) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\ .$$

a) Zeigen Sie (ohne vollständige Induktion), dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{4}(a_n - 3)(a_n - 1) \\ a_{n+1} - 3 &= \frac{1}{4}(a_n + 3)(a_n - 3) \end{aligned}$$

b) Für welche Werte von $b \in \mathbb{R}$ ist (a_n) eine konstante Folge?

c) Sei $b > 3$.
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion und mit Hilfe von a), dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a_n > 3$
Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass die Folge (a_n) streng monoton wachsend ist.
Konvergiert die Folge (a_n) in diesem Fall ? (mit Begründung)

Aufgabe 4 (22 Punkte)

a) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 + 16z = 0$ und geben Sie sie in kartesischer Form an und zeichnen Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

b) Geben Sie ein Polynom mit reellen Koeffizienten an, das alle Lösungen aus a) und $z = 2i$ als Nullstellen hat.

c) Stellen Sie die komplexe Zahl $w = \sqrt[3]{2} \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i)$ in Exponentialdarstellung dar.

Für welches $k \in \mathbb{N}$ ist w eine Lösung der Gleichung $z^{k+1} + 16z = 0$ für $z \in \mathbb{C}$?

Aufgabe 5 (35 Punkte)

Gegeben ist das Polynom p mit $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie mit dem Horner-Schema, dass $x = -2$ eine Nullstelle von p ist.
Geben Sie die Linearfaktorzerlegung von p an.
Zeigen Sie, dass gilt: $p(-\frac{5}{2}) = \frac{85}{16}$.

b) Es ist nun $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $q(x) := p(x-2) - p(x)$ mit p von oben.
Zeigen Sie, dass für die Ableitung von q gilt: $q'(x) = 24x - 24x^2$.
Geben Sie alle stationären Stellen von q an.
Liegt bei den stationären Stellen von q jeweils ein relatives Maximum, relatives Minimum oder ein Sattelpunkt vor?

c) Begründen Sie, warum q auf dem Intervall $I := \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ absolute Minima und absolute Maxima besitzt, und geben Sie alle Stellen $x \in I$ an, an denen diese absoluten Minima bzw. Maxima angenommen werden.

d) Auf dem Intervall $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$ wird der Graph von p durch einen Streifen über dem Intervall $[a-2, a]$ der Breite 2 geschnitten (s. Skizze).
Für welche Werte von $a \in I$ ist die Differenz Δy der y-Koordinaten von linkem und rechtem Schnittpunkt des Streifens mit dem Graphen von p maximal?
Welchen Wert hat diese maximale Differenz?