HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Winter-Semester 2013/2014**

KLausurarbeit im Bachelor-Studiengang Mathematik

MODUL:	**Analysis 1**	FACH:	**Analysis A**
DATUM:	28. Januar 2014	ZEIT:	8:30 – 10:30
PRÜFER:	Drs. Brunk, Erben	SEMESTER:	MB1A und MB1B

HILFSMITTEL: Skript (1-2 Ordner) und 2 Bücher (inklusive Formelsammlung). Taschenrechner sind ausdrücklich nicht zugelassen.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Sie sollten **5 karierte Doppelbögen** und 2 Konzeptblätter erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.
- Diese Aufgabenblätter und das Konzeptpapier sollen **nicht** abgegeben werden.

Aufgabe 1. *(29 Punkte)* Gegeben ist die reelle Funktion f durch

$$f(x) = \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 8}\right|, \quad \text{für } x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Berechnen Sie $f'(x)$. Begründen Sie, dass $f'(x) < 0$ für alle $x < 0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$.

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

c) Geben Sie die Bilder $f((-\infty, 0))$ und $f((0, \infty))$, sowie den Wertebereich $W(f)$ an. Ist f injektiv (auf $D(f)$)? Die Antwort muss begründet sein.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $g := f|(-\infty, 0)$ eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt. Bestimmen Sie den Funktionsterm und den Definitionsbereich von g^{-1}.

Aufgabe 2. *(19 Punkte)*
Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x \cdot (\ln x - 1)$ für $x > 0$.

Im Kurvenpunkt $(a, f(a))$ mit $a > 1$ wird an den Graph von f die Tangente gelegt. Diese Tangente bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.

Untersuchen Sie die Fläche $A(a)$ des Dreiecks auf relative und absolute Extrema. Geben Sie das Infimum und das Supremum von $A(a)$ an.

Aufgabe 3. *(28 Punkte)*
Die vom Parameter $a > 0$ abhängige Folge $\langle x_n \rangle$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 = 3 \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $x_n > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Für welchen Wert a_0 von a ist die Folge $\langle x_n \rangle$ konstant? Begründen Sie, dass $x_1 < x_0$ für $a < a_0$ und $x_1 > x_0$ für $a > a_0$.

c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge $\langle x_n \rangle$ für $a < a_0$ streng monoton fallend ist.

d) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ für $a < a_0$.

e) Wie verhält sich die Folge $\langle x_n \rangle$ für $a > a_0$?

Aufgabe 4. *(19 Punkte)*
a) Zeigen Sie mittels Horner-Schema, dass $z_{a1} = -\frac{3}{2}i$ eine Nullstelle des Polynoms

$$p_a(z) := 8z^3 + 12iz^2 - 6z - 9i$$

ist und bestimmen Sie die restlichen Nullstellen z_{a2} und z_{a3}.

b) Geben Sie ein reelles Polynom $p_b(x)$ an, das ebenfalls diese komplexen Nullstellen z_{a1}, z_{a2} und z_{a3} besitzt. Zerlegen Sie $p_b(x)$ (soweit möglich) in reelle Linearfaktoren.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen z_{c1}, z_{c2} und z_{c3} des komplexen Polynoms

$$p_c(z) := z^3 - i$$

in Exponentialdarstellung. Wie lautet die kartesische Darstellung von z_{c1}, z_{c2} und z_{c3}?

d) Zeigen Sie, dass $p_a(z) = 8 \cdot p_c(z + \frac{i}{2})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5. *(25 Punkte)*

Zeigen Sie, dass ...

a) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin(2x)}{1 - \frac{1}{2}\cos^2 x}\, dx \;=\; 2\ln\frac{8}{7}$$

b) $$\int_{1}^{\infty} \left(\frac{4x}{1+x^2} - \frac{8}{1+2x} \right) dx \;=\; 4\ln 3 - 6\ln 2$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\sin(3x)}{1+x^2}\, dx \;=\; \pi$$

Hinweis: Beachten Sie symmetrische Grenzen.