HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Sommer-Semester 2014**

Klausurarbeit im Bachelor-Studiengang Mathematik

MODUL:	**Analysis 2**	FACH:	**Analysis B**
DATUM:	8. Juli 2014	ZEIT:	9:00 – 11:00
PRÜFER:	Dr. Jochen Brunk	SEMESTER:	MB2A und MB2B

HILFSMITTEL: ein einziges: **ein Blatt DIN A4**, beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben.
Taschenrechner und jegliche telekommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** und 2 Konzeptblätter erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.
- Diese Aufgabenblätter und das Konzeptpapier sollen **nicht** abgegeben werden.

Aufgabe 1. *(31 Punkte)*

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln\left(4x^2 + 4\right).$$

Bestimmen Sie zunächst die Taylorreihe (um $x = 0$) von $f'(x)$ und berechnen Sie daraus die Taylorreihe (um $x = 0$) von $f(x)$. Für welche x konvergiert die Reihe gegen $f(x)$?

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^\alpha} x^n.$$

c) Geben Sie eine Zahlenreihe $\sum a_n$ an, die absolut konvergiert und eine Zahlenreihe $\sum b_n$, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Aufgabe 2. *(29 Punkte)*

Gegeben sei die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung für $y = y(x)$

$$e^{-ax^2} \cdot y' = -4x \cdot (y + a)^2$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a alle konstanten Lösungen y der Differentialgleichung.

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die allgemeine Lösung $y_{allg} = y_{allg}(x)$ der Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie für $a > 0$ die Lösung der Differentialgleichung (in Abhängigkeit von a), welche die Anfangsbedingung $y(0) = -\frac{a}{2}$ erfüllt. Geben Sie (ohne Begründung) Infimum und Supremum der Lösung in Abhängigkeit von a an.

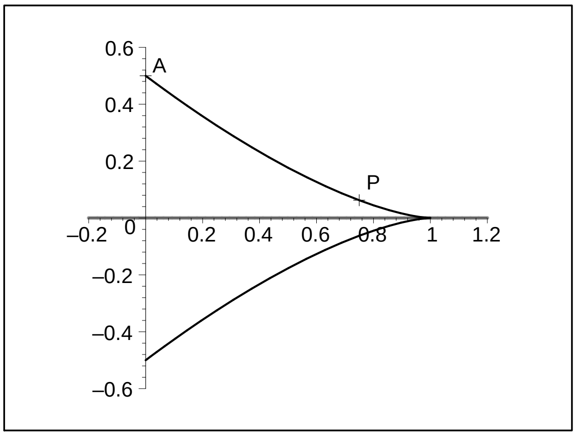
d) Geben Sie für $a = 0$ die Lösung der Differentialgleichung an, die die Anfangsbedingung $y(0) = -\frac{1}{8}$ erfüllt. Auf welchem Intervall stellt diese Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar? Zeigen Sie, dass diese Lösung unbeschränkt ist.

e) Welchem Gleichungstyp lässt sich die obige Differentialgleichung zuordnen? Geben Sie einen weiteren in der Vorlesung besprochenen Gleichungstyp in allgemeiner Form an, der sich in den Gleichungstyp der obigen Differentialgleichung transformieren lässt.

Aufgabe 3. *(32 Punkte)*

Die nebenstehend skizzierte Kurve K kann in Parameterdarstellung beschrieben werden durch

$$\underline{x}(t) = \left(\cos^2 t\,,\ -\frac{1}{2}\sin^3 t\right); \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



a) Geben Sie die Gleichung $y = mx+b$ der Tangente im Anfangspunkt A der Kurve an.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $P(\frac{3}{4}, \frac{1}{16})$ auf der Kurve liegt.

c) Begründen Sie, dass es sich bei der Kurve um eine symmetrisch zur x-Achse liegende Jordan-Kurve handelt. Ist die Kurve glatt?

d) Zusammen mit der y-Achse schließt K ein Flächenstück M ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

e) Ermitteln Sie die Länge der Kurve.

Aufgabe 4. *(28 Punkte)* Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 - 4xy - 2xe^y + xe^{2y}$$

a) Geben Sie den Gradienten von f und die Hesse-Matrix H_f an.

b) Zeigen Sie, dass f für $x \neq 0$ genau eine stationäre Stelle $S(x_s, y_s)$ besitzt. Prüfen Sie, ob es sich um ein relatives Minimum, ein relatives Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

c) Begründen Sie, dass f auf der Menge

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 86,\ y \geq x\}$$

absolute Minima und Maxima besitzt.

d) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom $p_2(x, y)$ mit dem Entwicklungspunkt $(2\ln 2, \ln 2)$.