HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Sommer-Semester 2013**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 2**	FACH:	**Analysis B**
DATUM:	18. Juli 2013	ZEIT:	9:00 – 11:00
PRÜFER:	Drs. Erben, Preissler	SEMESTER:	MB2A und MB2B

HILFSMITTEL: Skript (1-2 Ordner) und 2 Bücher (inklusive Formelsammlung). Taschenrechner sind ausdrücklich nicht zugelassen.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** und 2 Konzeptblätter erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.
- Diese Aufgabenblätter und das Konzeptpapier sollen **nicht** abgegeben werden.

Aufgabe 1. *(20 Punkte)*
Vorgelegt ist die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2k}}{2k} - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

a) Geben Sie eine Potenzreihe für $f'(x)$ an.

b) Bestimmen Sie eine geschlossene Form für $f'(x)$.

Hinweis: Betrachten Sie gerade und ungerade Potenzen getrennt. Verwenden Sie dann

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

c) Ermitteln Sie eine geschlossene Form für $f(x)$.

d) Prüfen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Für $x = 1$ bilden die Glieder der Reihe von f eine alternierende Nullfolge. Nach Leibniz ist die Reihe für $x = 1$ konvergent.
2. Die geschlossene Form von $f(x)$ strebt für $x \to 1$ nach $+\infty$. Aus dem Abelschen Grenzwertsatz ergibt sich die Divergenz der Reihe bei $x = 1$.

e) Geben Sie den Definitionsbereich $D(f)$ an.

Aufgabe 2. *(40 Punkte)*
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die Menge K mit

$$f(x, y) = x^2 - 2y^3 \qquad \text{und} \qquad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 + 16y^2 \leq 1\}$$

a) Geben Sie das totale Differential df, die Hesse-Matrix H_f und deren Determinante $\det(H_f)$ an. Bestimmen Sie die Tangentialebenen in den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

b) Geben Sie das erste Taylorpolynom p_1 von f (um $(0, 0)$) und das zugehörige Restglied an. Zeigen Sie, dass in dieser Situation der Taylorsche Satz richtig ist.

c) Zeigen Sie, dass f genau eine stationäre Stelle besitzt, aber keine relativen Extrema.

d) Beweisen Sie, dass f auf K das absolute Minimum $-\frac{1}{32}$ und das absolute Maximum $\frac{1}{16}$ hat. An welchen Stellen werden diese Extremwerte angenommen?

e) g sei die Einschränkung von f auf K, $g := f|K$. Bestimmen Sie die Urbilder $g^{-1}(\{-\frac{1}{32}\})$, $g^{-1}(\{+\frac{1}{16}\})$, $g^{-1}(\{-\frac{1}{32}, +\frac{1}{16}\})$ und $g^{-1}([-\frac{1}{32}, +\frac{1}{16}])$.

Aufgabe 3. *(24 Punkte)*

Gegeben sei die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Differentialgleichung 4. Ordnung für $y = y(x)$

$$y^{(4)} - (1+a)y'' + ay = 3e^{-2x} .$$

Sei zuerst $a = 1$.

a) Berechnen Sie für $a = 1$ die allgemeine Lösung $y_{allg} = y_{allg}(x)$ der Differentialgleichung.

b) Geben Sie für $a = 1$ alle für $x > 0$ beschränkten Lösungen y der Differentialgleichung an.

Sei ab jetzt $a \geq 0$ und $a \neq 1$.

c) Berechnen Sie für $a \neq 1$ die allgemeine Lösung $y_h = y_h(x)$ der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung in Abhängigkeit von a.

d) Für welchen Wert von $a \neq 1$ tritt Resonanz auf?
Geben Sie für diesen Wert von a den Störgliedansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung der Differentialgleichung an.
(Eine Berechnung der speziellen Lösung aus dem Ansatz ist nicht verlangt.)

Aufgabe 4. *(36 Punkte)*

Gegeben ist eine Kurve in der xy-Ebene mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = \cos t\,,\; y(t) = \sin 2t \quad \text{für} \quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

a) Zeigen Sie, dass die Kurve geschlossen ist.
Geben Sie die Tangentengleichungen $y = mx + b$ im Anfangs- und Endpunkt der Kurve an.
Zeigen Sie, dass die Kurve symmetrisch zur x-Achse ist.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurve mit den Achsen.
Bestimmen Sie die absoluten Extrempunkte der Kurve bzgl. der x- und y-Achse.

c) Skizzieren Sie die Kurve.

d) Geben Sie die Gleichung des Krümmungskreises im Rechtspunkt der Kurve an.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche die Kurve umschließt.
(Hinweis: Verwenden Sie dazu einen geeigneten Integranden.)