HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART — STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSVORLEISTUNG IM **WINTER-SEMESTER 2016/2017**

FACH:	Ergänzungen zur Analysis B	NAME:	Bsonders Gscheitle
DATUM:	16. November 2016		
ZEIT:	11:30 – 12:30	SEMESTER:	M2
PRÜFER:	Dr. Wolfgang Erben		

HILFSMITTEL: keine

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Auf diesem Deckblatt müssen **Name und Semester** eingetragen sein, ***bevor*** Sie mit der Bearbeitung beginnen. Die zusammengehefteten Blätter dürfen nicht getrennt werden.
- Gewertet wird ***nur*** das (im jeweiligen Antwortkasten eingetragene) **Ergebnis**. Eventuell notwendige Korrekturen müssen eindeutig gekennzeichnet sein.
- **Konzeptrechnungen** dürfen ***nur*** auf den Aufgabenblättern (Vorder- und Rückseite) durchgeführt werden.

Hinweise zu den Lösungen:

- Diese Version enthält die Ergebnisse und Angaben zum Lösungsweg.
- Bearbeiten Sie den gesamten Test ***bevor*** Sie die Lösungen nachschauen.
- Bei den Angaben zur Lösung handelt es sich nicht um Musterlösungen im Hinblick auf eine Klausur. Dort wären an vielen Stellen zusätzliche Begründungen nötig.

Abschnitt A. .... 30 Punkte

Aufgabe 1.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{10n}}{n!} = \boxed{e^{1024}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{10n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{10})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1024^n}{n!} = e^{1024}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+1}{5^k} = \boxed{\frac{35}{12}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+1}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{3} + \frac{5}{4} = \frac{35}{12}$$

c)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n^\alpha+3}} + \frac{\sqrt{n^\alpha+3}}{n^3}\right) \text{ konvergiert genau für } \boxed{2 < \alpha < 4}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^\alpha+3}} \quad \text{konvergiert genau für } \frac{\alpha}{2} > 1, \quad \text{also für } \alpha > 2$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n^\alpha+3}}{n^3} \quad \text{konvergiert genau für } 3 - \frac{\alpha}{2} > 1, \quad \text{also für } \alpha < 4$$

Aufgabe 2.

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \cdot x^k = \boxed{\frac{1}{1-3x}} \text{ für } x \in \boxed{(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k = \frac{1}{1-3x} \quad \text{für } \; 3x \in (-1,1), \quad \text{also für } \; x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

b)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \cdot x^i = \boxed{e^{-x} - 1} \text{ für } x \in \boxed{\mathbb{R}}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!} - 1 = e^{-x} - 1$

c)

$$\sum_{i=87}^{\infty} \frac{i+1}{i^2+1} \cdot (x+1)^i \quad \text{hat den Konvergenzradius } R = \boxed{1}$$

$$\text{und konvergiert (genau) für } x \in I = \boxed{[-2, 0)}$$

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n+1} = 1 \quad \text{also} \quad R = \frac{1}{\alpha} = 1$$

$\displaystyle\sum \frac{i+1}{i^2+1} \cdot (-1)^i$ ist wie $\displaystyle\sum \frac{1}{i} \cdot (-1)^i$ konvergent

$\displaystyle\sum \frac{i+1}{i^2+1}$ ist wie $\displaystyle\sum \frac{1}{i}$ divergent

Aufgabe 3. Entwickeln Sie die angegebenen Funktionen in eine Taylorreihe um 0. Geben Sie die Reihe sowohl in Summenschreibweise, als auch in aufzählender Schreibweise mit mindestens fünf nicht verschwindenden Gliedern an.

a)

$$x^2 \cdot e^{2x} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^{n+2}}$$

$$= \boxed{x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \ldots}$$

$$x^2 \cdot e^{2x} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^{n+2}$$

$$x^2 \cdot e^{2x} = x^2 \cdot \left(1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \ldots\right) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \ldots$$

b)

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot x^{2n}}$$

$$= \boxed{2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 2x^8 + \ldots}$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = (1 - x + x^2 - x^3 + - \ldots) + (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) =$$

$$= 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 2x^8 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot x^{2n}$$

Oder

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot x^{2n} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 2x^8 + \ldots$$

Abschnitt B. .... 30 Punkte

Aufgabe 4.

a)

$$\ddot{x} - 3\dot{x} = 2016$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = \boxed{C_1 + C_2 e^{3t} - 672t \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})}$$

Homogene Gleichung: $0 \stackrel{!}{=} \lambda^2 - 3\lambda = \lambda \cdot (\lambda - 3)$

Ansatz (einfache Resonanz): $x = t \cdot a \;\Rightarrow\; \dot{x} = a \;\Rightarrow\; \ddot{x} = 0$

Einsetzen: $0 - 3a = 2016 \;\Rightarrow\; a = 672$

b)

Geben Sie eine homogene lineare Differentialgleichung für $y(x)$ mit konstanten Koeffizienten an, deren allgemeine Lösung die Funktion $x \cdot \sin 3x$ enthält.

Differentialgleichung: $\boxed{y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0}$

$\pm 3i$ sind doppelte Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$(\lambda - 3i)^2 \cdot (\lambda + 3i)^2 = \big((\lambda - 3i)(\lambda + 3i)^2\big)^2 = (\lambda^2 + 9)^2 = \lambda^4 + 18\lambda^2 + 81$$

Aufgabe 5.

a)

$$y' + \frac{y}{x} = 76 + 54x \quad \text{mit} \quad y(-1) = 67$$

besitzt die Lösung

$$y(x) = \boxed{-\frac{87}{x} + 38x + 18x^2}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \boxed{(-\infty, 0)}$

$$y_{hom} = C^* \cdot e^{-ln|x|} = C^* \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{C}{x} \;\Rightarrow\; \text{Ansatz: } y = \frac{z}{x} \;\Rightarrow$$

$$\frac{z'}{x} = 76 + 54x \;\Rightarrow\; z' = 76x + 54x^2 \;\Rightarrow\; z = C + 38x^2 + 18x^3 \;\Rightarrow\; y = \frac{C}{x} + 38x + 18x^2$$

$$y(-1) = -C - 38 + 18 = -C - 20 \stackrel{!}{=} 67$$

b)

$$y' = \frac{x+1}{9x^2+1} - \frac{\frac{1}{9}}{x+1} \quad \text{mit} \quad y(0) = 9$$

besitzt die Lösung

$$y(x) = \boxed{\tfrac{1}{18}\ln(9x^2+1) + \tfrac{1}{3}\arctan 3x - \tfrac{1}{9}\ln(x+1) + 9}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \boxed{(-1, \infty)}$

$$y = \int \left(\frac{x+1}{9x^2+1} - \frac{\frac{1}{9}}{x+1} \right) dx = \frac{1}{18} \int \frac{18x}{9x^2+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{3\,dx}{(3x)^2+1} - \frac{1}{9} \ln|x+1| =$$

$$= \frac{1}{18}\ln(9x^2+1) + \frac{1}{3}\arctan 3x - \frac{1}{9}\ln|x+1| + C$$

$$y(0) = 0 + 0 - 0 + C \stackrel{!}{=} 9$$