HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSVORLEISTUNG IM **WINTER-SEMESTER 2015/2016**

FACH:	Ergänzungen zur Analysis B	NAME:	Anna Lüsis
DATUM:	10. November 2015		
ZEIT:	17:30 – 18:30	SEMESTER:	M2
PRÜFER:	Dr. Wolfgang Erben		

HILFSMITTEL: keine

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Auf diesem Deckblatt müssen **Name und Semester** eingetragen sein, ***bevor*** Sie mit der Bearbeitung beginnen. Die zusammengehefteten Blätter dürfen nicht getrennt werden.
- Gewertet wird ***nur*** das (im jeweiligen Antwortkasten eingetragene) **Ergebnis**. Eventuell notwendige Korrekturen müssen eindeutig gekennzeichnet sein.
- **Konzeptrechnungen** dürfen ***nur*** auf den Aufgabenblättern (Vorder- und Rückseite) durchgeführt werden.

Abschnitt A. .... 32 Punkte

Aufgabe 1.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+2^k}{5^k} = \boxed{\frac{5}{4}+\frac{5}{3} = \frac{35}{12}}$

c) $\sum \frac{1+n^\alpha}{1+n^{4\alpha}}$ konvergiert genau für $\boxed{\alpha > \frac{1}{3}}$

Aufgabe 2.

a) $\sum_{i=0}^{\infty} (x+3)^i = \boxed{\frac{1}{1-(x+3)} = -\frac{1}{2+x}}$ für $x \in \boxed{(-4,-2)}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \boxed{e^x - 1 - x}$ für $x \in \boxed{\mathbb{R}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = e^{x^2}}$ für $x \in \boxed{\mathbb{R}}$

d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1+i}{1+i^2} \cdot x^i$ hat den Konvergenzradius $\boxed{1}$ und konvergiert (genau)

für $x \in \boxed{[-1, 1)}$

Aufgabe 3. Entwickeln Sie die angegebenen Funktionen in eine Taylorreihe um 0. Geben Sie die Reihe sowohl in aufzählender Schreibweise mit mindestens fünf (nicht verschwindenden) Gliedern, als auch in Summenschreibweise an.

a) $$\frac{e^{2x}-1}{x} = \boxed{2 + 2x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^4 + \dots}$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n}$$

b) $$\frac{1}{4-x^2} = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{256}x^6 + \frac{1}{1024}x^8 + \dots}$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} x^{2n}}$$

Abschnitt B. .... 28 Punkte

Aufgabe 4.

a) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 48e^t$

ist $\boxed{x = 12e^t + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}}$

b) Geben Sie eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten an, deren allgemeine Lösung die Funktion $a \cdot x^2 + \sin 2x$ (für beliebiges $a \in \mathbb{R}$) enthält.

Differentialgleichung: $\boxed{y''' = -8\cos 2x}$

Aufgabe 5.

a) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + 2x \cdot y = xe^{-x^2}$ ist

$y(x) = \boxed{\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + C \cdot e^{-x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})}$

b) Die Lösung des Anfangswertproblems $y' = y^3$ mit $y(0) = -1$ ist

$y(x) = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}$

mit dem Definitionsbereich $D = \boxed{(-\infty, 2)}$