HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSVORLEISTUNG IM **SOMMER-SEMESTER 2017**

FACH:	Ergänzungen zur Analysis A	NAME:	Bsonders Gscheitle
DATUM:	17. Mai 2017		
ZEIT:	11:30 – 12:30	SEMESTER:	MB1
PRÜFER:	Dr. Wolfgang Erben		

HILFSMITTEL: keine

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Auf diesem Deckblatt müssen **Name und Semester** eingetragen sein, ***bevor*** Sie mit der Bearbeitung beginnen. Die zusammengehefteten Blätter dürfen nicht getrennt werden.
- Gewertet wird ***nur*** das (im jeweiligen Antwortkasten eingetragene) **Ergebnis**. Eventuell notwendige Korrekturen müssen eindeutig gekennzeichnet sein.
- **Konzeptrechnungen** dürfen ***nur*** auf den Aufgabenblättern (Vorder- und Rückseite) durchgeführt werden.

Hinweise zu den Lösungen:

- Diese Version enthält die Ergebnisse und Angaben zum Lösungsweg.
- Bearbeiten Sie den gesamten Test ***bevor*** Sie die Lösungen nachschauen.
- Bei den Angaben zur Lösung handelt es sich nicht um Musterlösungen im Hinblick auf eine Klausur. Dort wären an einigen Stellen zusätzliche Begründungen nötig.

Abschnitt A. .... 18 Punkte

Aufgabe 1. Vorgelegt sind die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = i - 7 \qquad \text{und} \qquad z_2 = 2(1+i)$$

a) Die Zahl z_1 hat den Realteil $\boxed{-7}$, den Imaginärteil $\boxed{1}$ und den Betrag $\boxed{5\sqrt{2}}$.

$$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

b) z_2 hat den Betrag $\boxed{2\sqrt{2}}$ und das Argument $\boxed{\frac{\pi}{4}}$. Es ist

$$|z_2^3| = \boxed{16\sqrt{2}}$$

$$|z_2| = 2\sqrt{1+1} = 2\sqrt{2}$$

z_2 liegt im ersten Quadranten ($\Re(z_2) > 0$ und $\Im(z_2) > 0$) auf der ersten Winkelhalbierenden ($\Im(z_2) = \Re(z_2)$). Deshalb ist $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$.

$$|z_2^3| = |z_2|^3 = (2\sqrt{2})^3 = 8 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

c) Weiter ist

$$z_1 \cdot z_2 = \boxed{-16 - 12i = -4(4+3i)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2(-7+i)(1+i) = 2(-7-1-7i+i) = 2(-8-6i) = -16-12i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{-\tfrac{3}{2} + 2i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-7+i}{2(1+i)} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-7+1+7i+i}{2 \cdot 2} = \frac{-6+8i}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2} + 2i$$

Aufgabe 2.

a) $\dfrac{|2i+\sqrt{5}|}{3-i} = \boxed{\frac{9}{10}+\frac{3}{10}i}$

$$\frac{|2i+\sqrt{5}|}{3-i} = \frac{\sqrt{4+5}}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{3(3+i)}{9+1} = \frac{9}{10}+\frac{3}{10}i$$

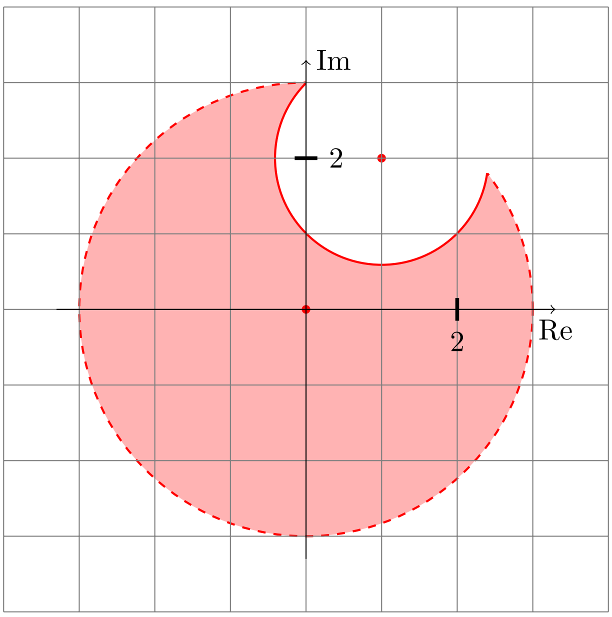
b) $\dfrac{2^{10}}{9i^9+11i^{11}} = \boxed{512i}$

$$\frac{2^{10}}{9i^9+11i^{11}} = \frac{1024}{9i+11i^3} = \frac{1024}{9i-11i} = -\frac{512}{i} = 512i$$

c) $e^{i\frac{\pi}{4}}+2e^{i\frac{2\pi}{4}}+3e^{i\frac{3\pi}{4}} = \boxed{-\sqrt{2}+i(2+2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})i}$

$$e^{i\frac{\pi}{4}}+2e^{i\frac{2\pi}{4}}+3e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)+2\cdot i+3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+i) =$$
$$= -\sqrt{2}+i(2+2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})i$$

Aufgabe 3. Zeichnen und schraffieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge $M = \{\ z\in\mathbb{C}\ \mid\ |z|<3 \quad \text{und} \quad |z-1-2i|\geq\sqrt{2}\ \}$.



Abschnitt B. .... 16 Punkte

Aufgabe 4. Die Funktion

$$f(x) = \frac{7e^x - 5}{6e^x - 4}$$

hat den (maximalen) Definitionsbereich $D(f) = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{\ln \tfrac{2}{3}\} \quad = \quad \mathbb{R} \setminus \{\ln 2 - \ln 3\}}$.

$$6e^y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6e^y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln \frac{2}{3}$$

Ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = \boxed{\ln \frac{4x-5}{6x-7}}$

$$y = \frac{7e^x - 5}{6e^x - 4} \quad \overset{*}{\Leftrightarrow} \quad y(6e^x - 4) = 7e^x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad e^x(6y - 7) = (4y - 5)$$

Bei der (wieder mit $*$) gekennzeichneten Äquivalenz ist zu beachten, dass die rechte Gleichung für $6e^x - 4 = 0$ nicht erfüllt ist.

$$e^x(6y - 7) = (4y - 5) \quad \overset{*}{\Leftrightarrow} \quad e^x = \frac{4y - 5}{6y - 7} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln \frac{4y - 5}{6y - 7}$$

Die mit $*$ gekennzeichnete Äquivalenz ist offenbar auch für $y = \frac{7}{6}$ richtig, weil die linke Gleichung dafür nicht erfüllt ist.

mit dem Definitionsbereich $D(f^{-1}) = \boxed{\mathbb{R} \setminus [\tfrac{7}{6}, \tfrac{5}{4}] \quad = \quad (-\infty, \tfrac{7}{6}) \cup (\tfrac{5}{4}, \infty)}$

$f^{-1}(x)$ ist definiert, wo Zähler und Nenner positiv sind, also für $x > \frac{5}{4} > \frac{7}{6}$, aber auch wo Zähler und Nenner beide negativ sind, also für $x < \frac{7}{6} < \frac{5}{4}$.

und dem Wertebereich $W(f^{-1}) = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{\ln \tfrac{2}{3}\}}$.

$$W(f^{-1}) = D(f)$$

Aufgabe 5. Die Funktion

$$g(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$$

hat den (maximalen) Definitionsbereich $D(g) = \boxed{[-2, 3]}$.

$$p(x) := 6 + x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}[-1 \pm \sqrt{1 + 24}] = \frac{1}{4} \mp \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-2, 3\}$$

$$p(\pm\infty) = -\infty < 0, \quad p(0) = 6 > 0$$

Ihr absolutes Maximum erreicht sie an der Stelle $x = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Die nach unten geöffnete Parabel hat ihr absolutes Maximum im Scheitel bei $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$
Weil die Wurzel streng monoton ist, hat g das Maximum an der gleichen Stelle.

Der Wertebereich ist $W(g) = \boxed{[0, \frac{5}{2}]}$.

$$g(\frac{1}{2}) = \sqrt{6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

Es ist $g(\{\frac{1}{2}\}) = \boxed{\{\frac{5}{2}\}}$, $g(\{-2\}) = \boxed{\{0\}}$

und $g(\{-2, 3\}) = \boxed{\{0\}}$,

sowie $g^{-1}(\{0\}) = \boxed{\{-2, 3\}}$ und $g^{-1}(\{-1\}) = \boxed{\emptyset}$.

Abschnitt C. .... 14 Punkte

Aufgabe 6.

a) $f(x) \;=\; \sqrt{1-x^2} \;+\; \sin^3 4x$

$$f'(x) \;=\; \boxed{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \;+\; 12\sin^2(4x)\cos(4x)}$$

b) $\dfrac{d}{dx}\left[e^{3x}(2\cos 5x - 4\sin 5x)\right] \;=\; \boxed{-2e^{3x}(7\cos 5x + 11\sin 5x)}$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{3x}(2\cos 5x - 4\sin 5x)\right] =$$
$$= 3e^{3x}(2\cos 5x - 4\sin 5x) + e^{3x}(-10\sin 5x - 20\cos 5x) =$$
$$= e^{3x}((6-20)\cos 5x + (-12-10)\sin 5x) =$$
$$= e^{3x}(-14\cos 5x - 22\sin 5x)$$

c) $g(x) \;=\; (1-x^6)(1+x^6) + x\sqrt{x} + \ln\dfrac{e^x}{x^7}$

$$= \quad 1 - x^{12} + x^{\frac{3}{2}} + x - 7\ln x$$

$$\frac{dg}{dx} \;=\; \boxed{-12x^{11} + \tfrac{3}{2}\sqrt{x} + 1 - \tfrac{7}{x}}$$

Aufgabe 7. $f(x,y) = \ln(7-3x+5y^2)$

$$f_x(x,y) = \boxed{\frac{-3}{7-3x+5y^2}}$$

$$f_y(x,y) = \boxed{\frac{10y}{7-3x+5y^2}}$$

$$f_{xx}(x,y) = \boxed{\frac{-9}{(7-3x+5y^2)^2}}$$

$$f_{xy}(x,y) = \boxed{\frac{30y}{(7-3x+5y^2)^2}}$$

$$f_{yy}(x,y) = \boxed{\frac{10}{7-3x+5y^2} - \frac{100y^2}{(7-3x+5y^2)^2} = \frac{10(7-3x-5y^2)}{(7-3x+5y^2)^2}}$$

Abschnitt D. .... 12 Punkte

Aufgabe 8. $f(x) = e^{-2x}(5-x)$

$$f'(x) = -2e^{-2x}(5-x) - e^{-2x} = e^{-2x}(-11+2x)$$

$$f''(x) = -2e^{-2x}(-11+2x) + 2e^{-2x} = e^{-2x}(24-4x)$$

$$f'''(x) = -2e^{-2x}(24-4x) - 4e^{-2x} = e^{-2x}(-52+8x)$$

a) Geben Sie das 0-te Taylor-Polynom p_0, das 2-te Taylor-Polynom p_2 und das 3-te Taylor-Polynom p_3 von f um den Entwicklungspunkt $a = 0$ an.

$f(0) = 5;\quad f'(0) = -11;\quad f''(0) = 24;\quad f'''(0) = -52$

$p_0(x) = \boxed{5}$

$p_2(x) = \boxed{5 - 11x + 12x^2}$

$p_3(x) = \boxed{5 - 11x + 12x^2 - \frac{26}{3}x^3}$

$$p_4(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6}\cdot x^3 =$$

$$= 5 - 11x + 12x^2 - \frac{26}{3}x^3$$

b) Geben Sie das 1-te Taylor-Polynom q_1 und das 3-te Taylor-Polynom q_3 von f um den Entwicklungspunkt $a = -1$ an.

$f(-1) = 6e^2;\quad f'(-1) = -13e^2;\quad f''(-1) = 28e^2;\quad f'''(-1) = -60e^2$

$q_1(x) = \boxed{6e^2 - 13e^2(x+1)}$

$q_3(x) = \boxed{6e^2 - 13e^2(x+1) + 14e^2(x+1)^2 - 10e^2(x+1)^3}$

$$q_3(x) = f(-1) + f'(-1)\cdot(x+1) + \frac{f''(-1)}{2}\cdot(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{6}\cdot(x+1)^3 =$$

$$= 6e^2 - 13e^2(x+1) + 14e^2(x+1)^2 - 10e^2(x+1)^3$$