HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSVORLEISTUNG IM **SOMMER-SEMESTER 2016**

FACH:	Ergänzungen zur Analysis A	NAME:	Irma Ginär
DATUM:	12. Mai 2016		
ZEIT:	14:00 – 15:00	SEMESTER:	MB1
PRÜFER:	Dr. Wolfgang Erben		

HILFSMITTEL: keine

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Auf diesem Deckblatt müssen **Name und Semester** eingetragen sein, ***bevor*** Sie mit der Bearbeitung beginnen. Die zusammengehefteten Blätter dürfen nicht getrennt werden.
- Gewertet wird ***nur*** das (im jeweiligen Antwortkasten eingetragene) **Ergebnis**. Eventuell notwendige Korrekturen müssen eindeutig gekennzeichnet sein.
- **Konzeptrechnungen** dürfen ***nur*** auf den Aufgabenblättern (Vorder- und Rückseite) durchgeführt werden.

Abschnitt A. .... 18 Punkte

Aufgabe 1. Vorgelegt sind die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = -5 + i\sqrt{3} \qquad \text{und} \qquad z_2 = -5 \cdot i\sqrt{3}$$

a) Die Zahl z_2 hat den Realteil $\boxed{0}$, den Imaginärteil $\boxed{-5\sqrt{3}}$, den Betrag $\boxed{5\sqrt{3}}$ und das Argument $\boxed{\frac{3\pi}{2}}$.

b) Es ist

$$|z_1 - \frac{2}{5}\bar{z}_2| = \boxed{2\sqrt{7}}$$

$$|z_1 - \frac{2}{5}\bar{z}_2| = |(-5 + i\sqrt{3}) - \frac{2}{5}(5i\sqrt{3})| = |-5 - i\sqrt{3}| = \sqrt{25+3} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$\mathrm{Im}(|z_1^2|) + \mathrm{Re}(|z_2^2|) = \boxed{75}$$

$$\mathrm{Im}(|z_1^2|) + \mathrm{Re}(|z_2^2|) = 0 + |z_2^2| = |z_2|^2 = 25 \cdot 3 = 75$$

c) Weiter ist

$$z_2 \cdot z_1 = \boxed{15 + 25\sqrt{3}i}$$

$$z_2 \cdot z_1 = (-5i\sqrt{3}) \cdot (-5 + i\sqrt{3}) = 25i\sqrt{3} + 5 \cdot 3 = 15 + 25\sqrt{3}i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \boxed{-\tfrac{15}{28} + \tfrac{25}{28}\sqrt{3}i}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-5i\sqrt{3}}{-5 + i\sqrt{3}} \cdot \frac{-5 - i\sqrt{3}}{-5 - i\sqrt{3}} = \frac{25i\sqrt{3} - 15}{25 + 3} = -\frac{15}{28} + \frac{25}{28}\sqrt{3}i$$

Aufgabe 2. Geben Sie das Ergebnis in kartesischer Darstellung $x + iy$ an:

a) $\dfrac{|1+\sqrt{3}i|}{1+i} = \boxed{1-i}$

$$\frac{|1+\sqrt{3}i|}{1+i} = \frac{\sqrt{1+3}}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2(1-i)}{1+1} = 1-i$$

b)

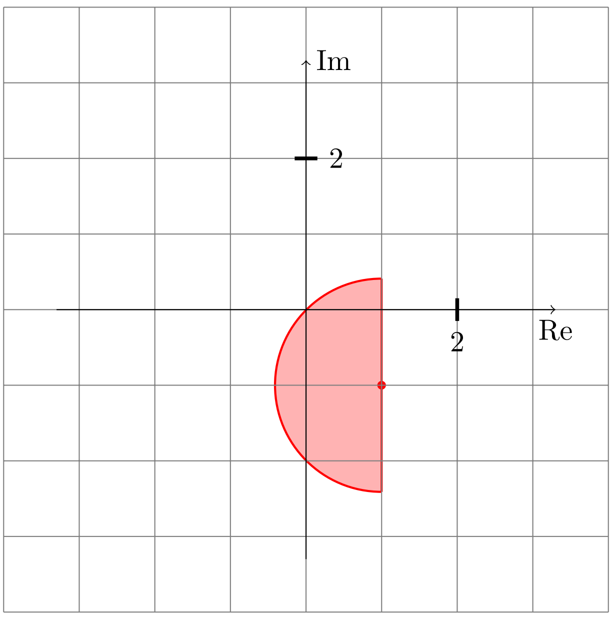
$\dfrac{2^9+i^9}{2^{10}+i^{10}} = \boxed{\tfrac{512}{1023} + \tfrac{1}{1023}i}$

c)

$e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{i}{2}(2+\sqrt{2})}$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = i + \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}(2+\sqrt{2})$$

Aufgabe 3. Zeichnen und schraffieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge $M = \{\ z \in \mathbb{C} \ \mid \ \mathrm{Re}(z) \leq 1 \quad \text{und} \quad |z-1+i| \leq \sqrt{2}\ \}$.



Abschnitt B. .... 15 Punkte

Aufgabe 4. Die Funktion

$$f(x) = \ln \frac{4x-5}{6x-7}$$

hat den (maximalen) Definitionsbereich $D(f) = \boxed{\mathbb{R} \setminus [\frac{7}{6}, \frac{5}{4}] \quad = \quad (-\infty, \frac{7}{6}) \cup (\frac{5}{4}, \infty)}$.

$f(x)$ ist definiert, wo Zähler und Nenner positiv sind, also für $x > \frac{5}{4} > \frac{7}{6}$, aber auch wo Zähler und Nenner beide negativ sind, also für $x < \frac{7}{6} < \frac{5}{4}$.

Ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = \boxed{\frac{7e^x - 5}{6e^x - 4}}$

$$y = \ln \frac{4x-5}{6x-7} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{4x-5}{6x-7} \quad \overset{*}{\Leftrightarrow} \quad e^y(6x-7) = (4x-5) \quad \Leftrightarrow$$

Die mit $*$ gekennzeichnete Äquivalenz ist offenbar auch für $x = \frac{7}{6}$ richtig, weil die rechte Gleichung dafür nicht erfüllt ist.

$$\Leftrightarrow \quad x(6e^y - 4) = 7e^y - 5 \quad \overset{*}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{7e^y - 5}{6e^y - 4}$$

Bei der (wieder mit $*$) gekennzeichneten Äquivalenz ist zu beachten, dass die linke Gleichung für $6e^y - 4 = 0$ nicht erfüllt ist.

mit dem Definitionsbereich $D(f^{-1}) = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{\ln \frac{2}{3}\} \quad = \quad \mathbb{R} \setminus \{\ln 2 - \ln 3\}}$

$$6e^y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6e^y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln \frac{2}{3}$$

und dem Wertebereich $W(f^{-1}) = \boxed{D(f) \quad = \quad (-\infty, \frac{7}{6}) \cup (\frac{5}{4}, \infty)}$.

$$W(f^{-1}) = D(f)$$

Aufgabe 5. Die Funktion

$$g(x) = \frac{3}{4 - 2\arctan x}$$

$$u(x) := \arctan x \qquad v(x) := 4 - 2\arctan x$$

hat den (maximalen) Definitionsbereich $D(g) = \boxed{\mathbb{R}}$

$$u(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad v(\mathbb{R}) = (4-\pi, 4+\pi) \quad \Rightarrow \quad 0 \notin v(\mathbb{R})$$

und den Wertebereich $W(g) = \boxed{\left(\frac{3}{4+\pi}, \frac{3}{4-\pi}\right)}$.

$$v(\mathbb{R}) = (4-\pi, 4+\pi) \quad \Rightarrow \quad g(\mathbb{R}) = (\frac{3}{4+\pi}, \frac{3}{4-\pi})$$

Ihre Umkehrfunktion ist $g^{-1}(x) = \boxed{\tan(2 - \frac{3}{2x}) \quad = \quad \tan(\frac{4x-3}{2x})}$

$$y = \frac{3}{4 - 2\arctan x} \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot (4 - 2\arctan x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -2y \arctan x = 3 - 4y$$

Wegen $y \neq 0$ kann durch $-2y$ dividiert werden:

$$\Leftrightarrow \quad \arctan x = \frac{4y-3}{2y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan \frac{4y-3}{2y}$$

Für letztere Äquivalenz ist wichtig, dass der Tangens im Ergebnis auf den Definitionsbereich $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eingeschränkt wird.

mit dem Definitionsbereich $D(g^{-1}) = \boxed{\left(\frac{3}{4+\pi}, \frac{3}{4-\pi}\right)}$.

$$D(g^{-1}) = W(g)$$

Bei der (deshalb unnötigen) Bestimmung des Definitionsbereiches direkt aus dem Funktionsterm $g^{-1}(x)$ ist zu beachten, dass der Tangens auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eingeschränkt ist.

Abschnitt C. .... 15 Punkte

Aufgabe 6.

a) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{7+\cos e^{8x}} \;=\; \boxed{-4\dfrac{e^{8x}\sin e^{8x}}{\sqrt{7+\cos e^{8x}}}}$

b) $f(x) \;=\; (-1+x+\frac{9}{2}x^2)\cdot e^{x^2} \;+\; e^{2x}\cdot e^{3x}\cdot e^{4x}$

$\;=\; (-1+x+\frac{9}{2}x^2)\cdot e^{x^2} \;+\; e^{9x}$

$f'(x) \;=\; \boxed{(1+7x+2x^2+9x^3)\cdot e^{x^2} \;+\; 9e^{9x}}$

$f'(x) = (1+9x)\cdot e^{x^2} + 2x(-1+x+\frac{9}{2}x^2)\cdot e^{x^2} + 9e^{9x} =$
$= (1+9x)\cdot e^{x^2} + (-2x+2x^2+9x^3)\cdot e^{x^2} + 9e^{9x}$

c) $g(x) \;=\; 2\cos^2 x \;+\; 64\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} \;+\; 2\sin^2 x$

$\;=\; 2 \;+\; 32\ln(x+1) \;-\; 32\ln(x+2)$

$\dfrac{dg}{dx} \;=\; \boxed{\dfrac{32}{x+1} \;-\; \dfrac{32}{x+2} \;=\; \dfrac{32}{x^2+3x+2}}$

Aufgabe 7. $$f(x,y) \;=\; 5 \;+\; \frac{1}{3x-5y} \;+\; e^{x+y}\cdot\cos(x-y)$$

$$f_x(x,y) \;=\; \boxed{-\frac{3}{(3x-5y)^2} \;+\; e^{x+y}\cdot(\cos(x-y)-\sin(x-y))}$$

$$f_y(x,y) \;=\; \boxed{\frac{5}{(3x-5y)^2} \;+\; e^{x+y}\cdot(\cos(x-y)+\sin(x-y))}$$

$$f_{xx}(x,y) \;=\; \boxed{\frac{18}{(3x-5y)^3} \;-\; 2e^{x+y}\cdot\sin(x-y)}$$

$$f_{xy}(x,y) \;=\; \boxed{-\frac{30}{(3x-5y)^3} \;+\; 2e^{x+y}\cdot\cos(x-y)}$$

$$f_{yx}(x,y) \;=\; \boxed{f_{xy}(x,y) \;=\; -\frac{30}{(3x-5y)^3} \;+\; 2e^{x+y}\cdot\cos(x-y)}$$

Abschnitt D. .... 12 Punkte

Aufgabe 8. $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$

$f'(x) = 2\cos 2x - 3\sin 3x$

$f''(x) = -4\sin 2x - 9\cos 3x$

$f'''(x) = -8\cos 2x + 27\sin 3x$

$f^{(4)}(x) = 16\sin 2x + 81\cos 3x$

Geben Sie das 0-te Taylor-Polynom p_0, das 2-te Taylor-Polynom p_2 und das 4-te Taylor-Polynom p_4 von f um den Entwicklungspunkt $a = 0$ an.

$f(0) = 1; \quad f'(0) = 2; \quad f''(0) = -9; \quad f'''(0) = -8; \quad f^{(4)}(0) = 81$

$p_0(x) = \boxed{1}$

$p_2(x) = \boxed{1 + 2x - \frac{9}{2}x^2}$

$p_4(x) = \boxed{1 + 2x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{27}{8}x^4}$

$$p_4(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24} \cdot x^4 =$$

$$= 1 + 2x + \frac{-9}{2} \cdot x^2 + \frac{-8}{6}x^3 + \frac{81}{24}x^4$$

Aufgabe 9. $f(x) = (x+3)^2 + (x+2)^3$

$f'(x) = 2(x+3) + 3(x+2)^2$

$f''(x) = 2 + 6(x+2)$

$f'''(x) = 6$

$f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = f^{(7)}(x) = 0$

Geben Sie die Taylor-Polynome p_1 vom Grad 1, p_3 vom Grad 3, p_5 vom Grad 5 und p_7 vom Grad 7 um den Entwicklungspunkt $a = 1$ an.

$f(1) = 16 + 27 = 43; \quad f'(1) = 8 + 27 = 35; \quad f''(1) = 2 + 18 = 20;$

$f'''(1) = 6; \quad f^{(4)}(1) = f^{(5)}(1) = f^{(6)}(1) = f^{(7)}(1) = 0$

$p_1(x) = \boxed{43 + 35(x-1)}$

$p_3(x) = \boxed{43 + 35(x-1) + 10(x-1)^2 + (x-1)^3}$

$p_5(x) = \boxed{p_3(x) \quad = \quad 43 + 35(x-1) + 10(x-1)^2 + (x-1)^3}$

$p_7(x) = \boxed{p_3(x) \quad = \quad 43 + 35(x-1) + 10(x-1)^2 + (x-1)^3}$

$$p_7(x) = \sum_{n=0}^{7} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \cdot (x-1)^n = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \cdot (x-1)^n =$$

$$= 43 + 35(x-1) + \frac{20}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{6}(x-1)^3$$

Alternativ, ohne Ableitungen:

$$p_3(x) = f(x) = ((x-1)+4)^2 + ((x-1)+3)^3 = [(x-1)^2 + 8(x-1) + 16] +$$

$$+[(x-1)^3 + 9(x-1)^2 + 27(x-1) + 27] = 43 + 35(x-1) + 10(x-1)^2 + (x-1)^3$$