HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **SS 2017**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 1**	FACH:	**Analysis A**
DATUM:	12. Juli 2017	ZEIT:	8:30 – 10:30
PRÜFER:	Wolfgang Erben	SEMESTER:	MB1

HILFSMITTEL: **ein Blatt DIN A4**, beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben.
Taschenrechner und jegliche telekommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Diese Aufgabenblätter sollten aus **3 Seiten** bestehen und Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen. Die vorliegenden Aufgabenblätter sollen **nicht** abgegeben werden.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Verwendung von Regeln und Sätzen muss angegeben und ihre Anwendbarkeit begründet sein.

Aufgabe 1. (24 Punkte)

a) Berechnen Sie die komplexe Zahl $z_1 = \dfrac{1-2i}{3+i}$. Geben Sie $|z_1|$ und $|(\frac{1}{z_1})^8|$ an.

b) Bestimmen Sie das Argument von $z_2 = 2(1+\sqrt{2})(1-i)$. Ermitteln Sie das Quadrat von $z_3 = i - 1 - \sqrt{2}$ und zeigen Sie, dass $z_3^2 = z_2$. Berechnen Sie damit $\arg(z_3)$.

c) Lösen Sie die beiden Gleichungen $16 + z^4 = 0$ und $z^4 + 1024 = 0$. Geben Sie die Lösungen der ersten Gleichung in Exponentialform an, die Lösungen der zweiten Gleichung in kartesischer Darstellung.

Lösung

a) Es ist

$$z_1 = \frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)} = \frac{(3-2)+(-1-6)i}{9+1} = \frac{1}{10}(1-7i)$$

Für die Beträge ergibt sich

$$|z_1| = \frac{1}{10}\sqrt{1+49} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad |(\frac{1}{z_1})^8| = |z_1|^{-8} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-8} = 2^4 = 16$$

b) In der Gaußschen Zahlenebene liegt die Zahl z_2 auf der zweiten Winkelhalbierenden ($\Im(z_2) = -\Re(z_2)$) im vierten Quadranten ($\Re(z_2) > 0$ und $\Im(z_2) < 0$). Deshalb ist das Argument von z_2 gleich $\frac{7\pi}{4}$. Es ist

$$\begin{aligned}
z_3^2 &= (i-(1+\sqrt{2}))^2 = -1 - 2i(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2 = \\
&= -1 - 2i(1+\sqrt{2}) + (1+2\sqrt{2}+2) = (2\sqrt{2}+2) - 2i(1+\sqrt{2}) = \\
&= 2(1+\sqrt{2})(1-i) = z_2
\end{aligned}$$

Modulo 2π muss also $\arg(z_2) = 2\cdot\arg(z_3)$ sein. Für $\arg(z_3)$ kommen also nur $\frac{1}{2}\arg(z_2) = \frac{7\pi}{8}$ und $\pi + \frac{1}{2}\arg(z_2) = \frac{15\pi}{8}$ infrage. Offenbar liegt z_3 im vierten Quadranten ($\Re(z_3) > 0$ und $\Im(z_3) < 0$). Folglich ist $\arg(z_3) = \frac{15\pi}{8}$.

c) Für die erste Gleichung ist

$$z^4 = -16 = 2^4 \cdot e^{i\pi}$$

Die vier Lösungen sind damit

$$2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\ , \quad 2\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4})} = 2\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\ , \quad 2\cdot e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{4})} = 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}\ , \quad 2\cdot e^{i(\frac{5\pi}{4}+\frac{2\pi}{4})} = 2\cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Für die zweite Gleichung ergibt sich entsprechend

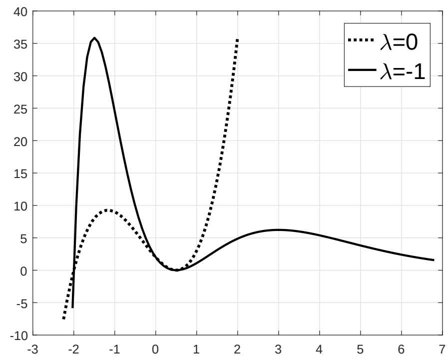
$$z^4 = -1024 = 2^{10} \cdot e^{i\pi}$$

Wegen $\sqrt[4]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$ sind die vier Lösungen in Exponentialform

$$4\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \ , \quad 4\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \ , \quad 4\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} \ , \quad 4\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

In kartesischer Darstellung ergibt sich (in gleicher Reihenfolge)

$$4(1+i) \ , \quad 4(-1+i) \ , \quad 4(-1-i) \ , \quad 4(1-i)$$



Aufgabe 2. *(36 Punkte)*

Vorgelegt ist die von $\lambda \leq 0$ abhängende Funktion $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_\lambda(x) = e^{\lambda x} \cdot (2 - 7x + 4x^2 + 4x^3)$$

Nebenstehend sind die Schaubilder für die beiden Werte $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$ veranschaulicht.

a) Berechnen Sie $f_\lambda(-2)$, $f_\lambda(-\frac{3}{2})$und $f_\lambda(3)$. Verwenden Sie zur Auswertung des Polynoms jeweils das Horner-Schema. Bestätigen Sie, dass $f_\lambda(-2) = 0$ für alle λ.

b) Ermitteln Sie $f_\lambda(\{-2, 0\})$ und $f_\lambda^{-1}(\{0\})$. Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass jedes f_λ im Intervall $(-2, \frac{1}{2})$ eine stationäre Stelle besitzt.

c) Berechnen Sie (in Abhängigkeit von λ) die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to -2-} f_\lambda(x)$ und $\lim\limits_{x \to -2+} \frac{1}{f_\lambda(x)}$, sowie $\lim\limits_{x \to -\infty} f_\lambda(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

d) Bestimmen Sie die Wertebereiche $W(f_0)$ und $W(f_{-1})$. Überprüfen Sie die beiden Funktionen f_0 und f_{-1} auf Injektivität und Surjektivität.

Lösung

a) Für das Polynom $p(x) = 2 - 7x + 4x^2 + 4x^3$ wird nach Horner $p(-2)$, $p(-\frac{3}{2})$ und $p(3)$ berechnet:

$$\begin{array}{rrrrr} & 4 & 4 & -7 & 2 \\ -2 & & -8 & 8 & -2 \\ \hline & 4 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 4 & 4 & -7 & 2 \\ -\frac{3}{2} & & -6 & 3 & 6 \\ \hline & 4 & -2 & -4 & \boxed{8} \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 4 & 4 & -7 & 2 \\ 3 & & 12 & 48 & 123 \\ \hline & 4 & 16 & 41 & \boxed{125} \end{array}$$

Dies beweist $f_\lambda(-2) = e^{-2\lambda} \cdot p(-2) = 0$, $f_\lambda(-\frac{3}{2}) = 8e^{-\frac{3}{2}\lambda}$ und $f_\lambda(3) = 125e^{3\lambda}$.

b) Zudem liefert es die für die Bestimmung der restlichen Nullstellen wichtige Zerlegung

$$p(x) = (x + 2)(4x^2 - 4x + 1) = (x + 2)(2x - 1)^2$$

Es ist $f_\lambda(-2) = 0$ (siehe oben) und $f_\lambda(0) = 2$. Die Zerlegung von $p(x)$ zeigt, dass p neben -2 nur noch die (doppelte) Nullstelle $\frac{1}{2}$ besitzt. Wegen $e^{\lambda x} \neq 0$ besitzt auch $f_\lambda(x)$ genau die beiden Nullstellen -2 und $\frac{1}{2}$. Für alle λ ist demnach

$$f_\lambda(\{-2, 0\}) = \{0, 2\} \quad \text{und} \quad f_\lambda^{-1}(\{0\}) = \{-2, \frac{1}{2}\}$$

f_λ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert die Existenz eines $\xi \in (-2, \frac{1}{2})$ mit $f'(\xi) = \frac{f(-2)-f(\frac{1}{2})}{-2-\frac{1}{2}} = \frac{0-0}{-2-\frac{1}{2}} = 0$. Dieses ξ ist also eine stationäre Stelle.

c) Für $x \to -2$ gilt $f_\lambda(x) \to f_\lambda(-2) = 0$ aufgrund der Stetigkeit von f_λ. Wegen $f_\lambda^{-1}(\{0\}) = \{-2, \frac{1}{2}\}$ und $f_\lambda(0) = 2 > 0$ ist $f(-2+) = 0+$. Also

$$\lim_{x\to-2-} f_\lambda(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-2+} \frac{1}{f_\lambda(x)} = \frac{1}{0+} = +\infty$$

Für $\lambda = 0$ ist

$$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$$

Für $\lambda < 0$ ergibt die Dominanz der e-Funktion gegenüber Polynomen für $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\to+\infty} \underbrace{p(x)}_{\to-\infty} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\to 0} \underbrace{p(x)}_{\to+\infty} = 0$$

d) Alle Funktionen f_λ sind stetig und haben den zusammenhängenden Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Nach dem Zwischenwertsatz haben sie alle einen zusammenhängenden Wertebereich. Aufgrund von $f_\lambda(-2) = f_\lambda(\frac{1}{2})$ ist keine der Funktionen injektiv.

Wegen $f_0(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ und $f_0(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ (siehe vorige Teilaufgabe) ist $W(f_0) = \mathbb{R}$. Die Funktion ist damit surjektiv.

Bei $g := f_{-1}$ ist die Bestimmung der stationären Stellen vonnöten.

$$g'(x) = e^x \cdot (-7 + 8x + 12x^2) - e^x \cdot (2 - 7x + 4x^2 + 4x^3) =$$

$$= e^x \cdot (-9 + 15x + 8x^2 - 4x^3) \stackrel{!}{=} 0$$

Weil $\frac{1}{2}$ eine doppelte Nullstelle von $p(x)$ ist, muss es auch Nullstelle von $g'(x)$ sein.

$$\begin{array}{c|cccc} & -4 & 8 & 15 & -9 \\ \frac{1}{2} & & -2 & 3 & 9 \\ \hline & -4 & 6 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

Die verbleibenden Nullstellen sind bei

$$-\frac{1}{8} \cdot (-6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 4 \cdot 18}) = \frac{3}{4} \mp \frac{1}{4}\sqrt{9 + 72} = \frac{3}{4} \mp \frac{9}{4} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-3}{2} \\ 3 \end{array} \right.$$

Die stationären Stellen von g sind demnach $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ und 3. Die zugehörigen Funktionswerte sind $g(-\frac{3}{2}) = 8e^{\frac{3}{2}}$, $g(\frac{1}{2}) = 0$ und $g(3) = 125e^{-3}$. Zusammen mit $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ beweist, dass $W(f_{-1})$ =W(g)= $(-\infty, 8e^{\frac{3}{2}}]$. f_{-1} ist folglich nicht surjektiv.

Aufgabe 3. *(30 Punkte)*

a) Lösen Sie in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x = \sqrt{1 + b^2x^2}$. Geben Sie insbesondere an, für welche b die Gleichung lösbar ist und wann die Lösung eindeutig ist.

b) Zeigen Sie, dass die rekursiv über $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + 87a_n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $\langle a_n \rangle$ divergiert.

c) Begründen Sie präzise, dass für die über $f(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$ gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $f([0, \frac{2}{3}\sqrt{3}] = [1, \frac{2}{3}\sqrt{3}]$. Bestimmen Sie die Menge $P = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) > x\}$.

d) Zeigen Sie, dass die rekursiv über $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}a_n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert und bestimmen Sie Ihren Grenzwert. Beweisen Sie dazu zunächst mittels vollständiger Induktion, dass die ganze Folge $\langle a_n \rangle$ im Intervall $[0, \frac{2}{3}\sqrt{3}]$ liegt

Lösung

a) Es ist

$$x = \sqrt{1 + b^2x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad x^2 = 1 + b^2x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad x^2 \cdot (1 - b^2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |b| < 1 \quad \text{und} \quad x = \frac{+1}{\sqrt{1 - b^2}}$$

Genau für $|b| < 1$ ist die Gleichung also lösbar. Die Lösung ist dann eindeutig.

b) Hätte die Folge einen Grenzwert a, so müsste dieser ein Fixpunkt der Rekursionsvorschrift sein: $a = \sqrt{1 + 87a^2}$. Nach der vorigen Teilaufgabe hat diese Gleichung aber keine Lösung. Es kann also keinen Grenzwert geben. Die Folge ist divergent.

c) Für $x \geq 0$ ist f wegen

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{4}}{2\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{4\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}} \geq 0$$

monoton wachsend. (Alternativ kann dies durch den Aufbau von f als Komposition zweier monotoner Funktionen belegt werden.) Damit ist

$$f([0, \frac{2}{3}\sqrt{3}] = [f(0), f(\frac{2}{3}\sqrt{3})] = [1, \sqrt{1 + \frac{3}{9}}] = [1, \frac{2}{3}\sqrt{3}]$$

$f(x) = x$ ist die in der ersten Teilaufgabe gelöste Gleichung für $b = \pm\frac{1}{2}$. Es gibt also die eindeutige Lösung

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Nur an dieser Stelle kann $f(x) - x$ das Vorzeichen wechseln. Wegen $f(0) - 0 = 1 > 0$ und $f(2) - 2 = \sqrt{2} - 2 < 0$ ist

$$P := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > x\} = (-\infty, \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

d) Zu zeigen ist zunächst, dass $a_n \in [0, \frac{2}{3}\sqrt{3}] =: I$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Induktionsanfang: Es ist $a_1 = 0 \in I$.

Induktionsschritt: Es gelte $a_n \in I$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wegen $a_{n+1} = f(a_n)$ und $f(I) = [1, \frac{2}{3}\sqrt{3}] \subset I$ ist $a_{n+1} \in I$. □

Damit ist die Folge insbesondere beschränkt. Wegen $I \subset P$ ist

$$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n > 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Die Folge ist demnach auch (streng) monoton wachsend. Der Hauptsatz über monotone Folgen garantiert die Konvergenz der Folge. Der Grenzwert a ist ein Fixpunkt der Rekursionsvorschrift. Im vorigen Aufgabenteil wurde $a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ermittelt.

Aufgabe 4. *(30 Punkte)*

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arctan x$. Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von f und geben Sie $F(1)$ an.

b) Bestimmen Sie $\int \arctan(ax)\, dx$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $a, b > 0$

$$\lim_{x\to\infty} (x\arctan(ax) - x\arctan(bx)) \;=\; \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

d) Weisen Sie nach, dass

$$\int\limits_0^\infty \left(\arctan(2x) - \arctan(4x) + \frac{1}{4x+4}\right) dx \;=\; -\frac{1}{4}$$

Lösung

a) Mit $u' = 1$ und $v = \arctan x$ ist $u = x$ und $v' = \frac{1}{1+x^2}$. Produktintegration ergibt dann

$$\int \arctan x\, dx = \int 1 \cdot \arctan x\, dx = x\arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Eine Stammfunktion von f ist also etwa $F(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Ihr Wert an der Stelle 1 ist $F(1) = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

b) Für $a = 0$ ist $\int\ \arctan(ax)\, dx = \int 0\, dx = C$. Mit $u = a \cdot x$ ist $du = adx$, also für $a \neq 0$

$$\int\ \arctan ax\, dx = \frac{1}{a}\int\ \arctan u\, du = \frac{1}{a}\left[u\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right] + C =$$

$$= x \cdot \arctan(ax) - \frac{1}{2a}\ln(1+(ax)^2) + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

c) Für $a, b > 0$ ist

$$\lim_{x\to\infty} (x\arctan(ax) - x\arctan(bx)) = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{\frac{1}{x}} = \boxed{\tfrac{0}{0}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a}{1+(ax)^2} - \frac{b}{1+(bx)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{bx^2}{1+b^2x^2} - \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2}{1+a^2x^2} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

d) Es ist

$$\int \arctan(2x) - \arctan(4x) + \frac{1}{4x+4}\, dx = [x \arctan 2x - \frac{1}{4}\ln(1+(2x)^2)] -$$

$$-[x\arctan 4x - \frac{1}{8}\ln(1+(4x)^2)] + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C =$$

$$= x(\arctan 2x - \arctan 4x) + \frac{1}{8}\ln\frac{(1+16x^2)(x+1)^2}{(1+4x^2)^2} + C$$

$$\int_0^\infty \arctan(2x) - \arctan(4x) + \frac{1}{4x+4}\, dx = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\ln \lim_{x\to\infty}\frac{16x^4}{16x^4} = -\frac{1}{4}$$