Thema: Mehr Funktionen mehrerer Veränderlicher

Aufgabe 1. $\approx$ **WS14/15** (30 Punkte).

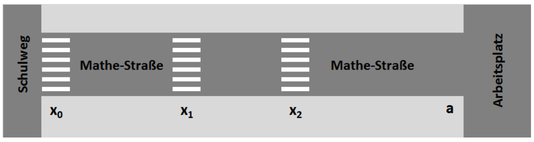
a) Zeigen Sie, dass ($a \in \mathbb{R}$) $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(x, y) = x^2 + (y - x)^2 + 2(a - y)^2$$

genau eine stationäre Stelle besitzt. Handelt es sich um ein (relatives) Minimum, ein Maximum oder um einen Sattelpunkt?

b) Begründen Sie, dass f_a unter der Nebenbedingung $y = a$ ein absolutes Minimum besitzt. Bestimmen Sie dieses Minimum.

c) Vom holprigen Schulweg führt die Mathe-Straße zum schönen Arbeitsplatz. Am unteren Ende der Mathe-Straße befindet sich ein Zebrastreifen, zwei weitere sollen hinzukommen. Dabei soll entlang der Mathe-Straße die mittlere Entfernung zum nächsten Zebrastreifen möglichst klein werden.



Wo müssen die Zebrastreifen angelegt werden? Wie weit ist es dann im Mittel bis zum nächsten Überweg? Die Breite der Überwege ist zu vernachlässigen.

Aufgabe 2. (siehe Prüfung im **SS14**) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 - 4xy - 2xe^y + xe^{2y}$$

a) Bestimmen Sie für $a \geq 0$ das Bild $f(G_a)$ der Geraden $G_a = \{a\} \times \mathbb{R}$.

b) Geben Sie für $R = [0, 1] \times [0, \ln 2]$ die Bilder $f(R)$ und $f(\partial R)$ an.

c) Es sei $S = [0, 3] \times \mathbb{R}$. Ermitteln Sie $f(S)$ und $f(\partial S)$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a > 0$ den Wertebereich von

$$f_a(x, y) = x + \frac{1}{x} + a \cdot \sin(\pi y)$$

Für welche a ist f_a surjektiv? Zeigen Sie, dass f_a für alle a punktsymmetrisch zum Ursprung und in y-Richtung periodisch ist.

Aufgabe 4. Es geht um Funktionen $f_i \in C(K)$ mit $K = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Es sei $f_1(K) = [0, 1]$ und $f_1^{-1}(\{1\}) = \{(0, 0)\}$. Was folgt daraus für $f_1(\{(0, 0)\})$, was für $f_1^{-1}([0, 1[)$?

b) Es sei $f_2(K) = [0, 1]$ und $f_2(\{(0, 0)\}) = \{1\}$. Was folgt daraus für $f_2^{-1}(\{1\})$, was für $f_2(K \setminus \{(0, 0)\})$?

c) Es sei $f_3(K) \in \{]0, 1[, \{0, 1\}\}$. Was folgt daraus für $f_3^{-1}(\{1\})$?

Geben Sie jeweils Beispiele für derartige Funktionen an.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie für die beiden Entwicklungsmitten $(0, 0)$ und $(\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8})$ das nullte, das erste und das zweite Taylorpolynom der Funktion

$$f(x, y) = e^{x+y} \cos(x - y)$$

Stellen Sie die Funktion durch das erste Taylorpolynom um $(0, 0)$ mit geeignetem Restglied dar.

Aufgabe 6.

a) Geben Sie eine überall konvergente, aber nicht abbrechende Potenzreihe $f(x, y)$ an, die im Punkt $M(0, 1, 0)$ ein relatives Minimum besitzt.

b) Geben Sie eine Potenzreihe $g(x, y)$ mit einem Sattelpunkt und $D(g) = [0, 1] \times [0, 1)$ an.

Aufgabe 7. Für welche $\alpha, \beta \geq 0$ kann $f(x, y) = x^\alpha y^\beta (x^2 + y^2)^{-1}$ zu einer Funktion $f^\star \in C(\mathbb{R}^2)$ erweitert werden?