HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSVORLEISTUNG IM **WINTER-SEMESTER 2009/2010**

FACH:	Ergänzungen zur Analysis A	NAME:	Anna Lüsis
DATUM:	15. Dezember 2009		
ZEIT:	14:00 – 15:00	SEMESTER:	M1a
PRÜFER:	Prof. Dr. Wolfgang Erben		

HILFSMITTEL: keine

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Auf diesem Deckblatt müssen **Name und Semester** eingetragen sein ***bevor*** Sie mit der Bearbeitung beginnen. Die zusammengehefteten Blätter dürfen nicht getrennt werden.
- Gewertet wird ***nur*** das (im jeweiligen Antwortkasten eingetragene) **Ergebnis**. Eventuell notwendige Korrekturen müssen eindeutig gekennzeichnet sein.
- **Konzeptrechnungen** dürfen ***nur*** auf den Aufgabenblättern (Vorder- und Rückseite) durchgeführt werden.

Abschnitt A. .... 15 Punkte

Aufgabe 1.

a) Die komplexe Zahl

$$z_a = 5i - 5$$

hat den Betrag $\boxed{5\sqrt{2}}$ und das Argument $\boxed{\frac{3\pi}{4}}$.
Ihre Exponentialdarstellung ist

$$z_a = \boxed{5\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}.$$

b) Die komplexe Zahl

$$z_b = 8 \cdot e^{i\frac{5\pi}{2}}$$

hat den Betrag $\boxed{8}$ und das Argument $\boxed{\frac{\pi}{2}}$.
Die normale Darstellung der Zahl z_b (über Real- und Imaginärteil) ist

$$z_b = \boxed{8i}.$$

c) Die komplexe Zahl

$$z_c = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

hat den Betrag $\boxed{1}$ und das Argument $\boxed{\frac{\pi}{6}}$.

Aufgabe 2.

a)

$$(2i+1)\cdot(7-i) \quad = \quad \boxed{9+13i}$$

b)

$$\frac{17i}{3+5i} \quad = \quad \boxed{\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}i}$$

c)

$$\left|(3-i)\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \quad = \quad \boxed{\sqrt{10}}$$

Abschnitt B. .... 10 Punkte

Aufgabe 3.

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \quad = \quad \ln(x^2 - x + 1)$$

besitzt genau eine stationäre Stelle, nämlich bei $x_s = \boxed{\frac{1}{2}}$

Es handelt sich dabei um ...

- einen Hochpunkt *ja* ☐ *nein* ☒,
- einen Tiefpunkt *ja* ☒ *nein* ☐,
- einen Sattelpunkt *ja* ☐ *nein* ☒.

b) Der Wertebereich von f ist $W(f) = \boxed{[\ln \frac{3}{4}, \infty)}$.

Die Funktion ist ...

- nach unten beschränkt *ja* ☒ *nein* ☐,
- nach oben beschränkt *ja* ☐ *nein* ☒,
- beschränkt *ja* ☐ *nein* ☒.

c) Die Einschränkung $f|[1, \infty)$ ist ...

- monoton fallend *ja* ☐ *nein* ☒,
- monoton wachsend *ja* ☒ *nein* ☐,
- streng monoton *ja* ☒ *nein* ☐.

Abschnitt C. .... 20 Punkte

Aufgabe 4.

a) $f(x) = \cos(x^2)$

$f'(x) = \boxed{-2x \cdot \sin(x^2)}$

$f''(x) = \boxed{-2 \cdot \sin(x^2) - 4x^2 \cdot \cos(x^2)}$

b) $f(x) = e^{3x} \cdot (5 - \sin 2x)$

$f'(x) = \boxed{e^{3x} \cdot (15 - 3\sin 2x - 2\cos 2x)}$

$f''(x) = \boxed{e^{3x} \cdot (45 - 5\sin 2x - 12\cos 2x)}$

c) $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+x}$

$f'(x) = \boxed{\frac{1}{3x} - \frac{1}{1+x}}$

$f''(x) = \boxed{-\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{(1+x)^2}}$

Aufgabe 5. $$f(x,y) = e^{3x} \cdot (5 - \sin 2y) + (x+y)^2$$

$$f_x(x,y) = \boxed{3e^{3x} \cdot (5 - \sin 2y) + 2(x+y)}$$

$$f_y(x,y) = \boxed{-2e^{3x} \cdot \cos 2y + 2(x+y)}$$

$$f_{xx}(x,y) = \boxed{9e^{3x} \cdot (5 - \sin 2y) + 2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \boxed{-6e^{3x} \cdot \cos 2y + 2}$$

$$f_{yx}(x,y) = \boxed{f_{xy}(x,y) = -6e^{3x} \cdot \cos 2y + 2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \boxed{4e^{3x} \cdot \sin 2y + 2}$$

Abschnitt D. .... 15 Punkte

Aufgabe 6.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+7n^2}{4n^2+7n} = \boxed{\frac{7}{4}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5-2n^2)^3}{(3n+1)^2(n^4+1)} = \boxed{-\frac{8}{9}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5+7^n}{n^7+5^n} = \boxed{\infty}$

Aufgabe 7.

a) $$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{2x^3-4x^2+x-2} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

b) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} = \boxed{0}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-5x}+e^{5x}-2}{x^2} = \boxed{25}$$

d) $$\lim_{x\to 0} \ln \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \boxed{\ln 2}$$