Aufgabe 1 (24 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, wenn sie existieren:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{3}}{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{6}}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^5-5x^2+3}{2x^3+x^2-8x+5}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2+\sin x)}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} (5x+1)\cdot\sin(1/x)$

---

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{3}{1+3x}}{\frac{2}{1+2x}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{3}}{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{6}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}}{\frac{2x}{2\sqrt{5+x^2}}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{2+x^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^5-5x^2+3}{2x^3+x^2-8x+5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{10x^4-10x}{6x^2+2x-8} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{40x^3-10}{12x+2} = \dfrac{30}{14} = \dfrac{15}{7}$

d) Aus $-1 \le \sin x \le 1$ folgt $0 \le \ln(2+\sin x) \le \ln 3$.

Also ist der Zähler beschränkt, daher gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2+\sin x)}{x} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} (5x+1)\cdot\sin(1/x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(1/x)}{\frac{1}{5x+1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos(1/x)\cdot(-1/x^2)}{-\frac{5}{(5x+1)^2}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(5x+1)^2}{5x^2}\cdot\cos(1/x) = \lim_{x\to\infty} \frac{25x^2+10x+1}{5x^2}\cdot\cos(1/x) = 5\cdot 1 = 5$$

oder (mit der Substitution $u = 1/x$):

$$\lim_{x\to\infty} (5x+1)\cdot\sin(1/x) = \lim_{u\to 0+} \left(\frac{5}{u}+1\right)\cdot\sin u = \lim_{u\to 0+} \left(5\,\frac{\sin u}{u}+\sin u\right) = 5$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Ableitungen gerader Ordnungen $2n$ der Funktion $f(x) = x \cdot \sin x$ gegeben sind durch

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \,(x \cdot \sin x - 2n \cos x) \ .$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ergibt die Formel

$$f^{(0)}(x) = (-1)^0 \,(x \cdot \sin x - 0 \cdot \cos x) = x \cdot \sin x \ ,$$

also gilt $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Induktionsschritt: Gilt $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \,(x \cdot \sin x - 2n \cos x)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt durch zweimaliges Ableiten

$$f^{(2n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(2n)}(x) \ = \ (-1)^n \,(x \cdot \cos x + (2n+1) \sin x)$$

und

$$\begin{aligned} f^{(2n+2)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(2n+1)}(x) \ = \ (-1)^n \,((2n+2) \cos x - x \cdot \sin x) \\ &= (-1)^{n+1} \,(x \cdot \sin x - (2n+2) \cos x) \ , \end{aligned}$$

also

$$f^{(2(n+1))}(x) = (-1)^{n+1} \,(x \cdot \sin x - 2(n+1) \cos x) \ .$$

Die Formel gilt dann also auch für $n + 1$.

Aufgabe 3 (36 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} - x}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und alle Nullstellen von f an.

b) Bestimmen Sie $f'(x)$. Wo ist f' definiert? Wie verhält sich $f'(x)$, wenn sich x den Randpunkten von $D(f)$ nähert?

c) Warum existiert das globale Maximum von f auf $D(f)$? Bestimmen Sie diese Stelle und den zugehörigen Funktionswert. (Vermeiden Sie die Berechnung von f''.)

d) Geben Sie den Wertebereich $W(f)$ an.

e) Skizzieren Sie den Graphen von f in einem geeigneten Maßstab.

f) Geben Sie das größte $a \in \mathbb{R}$ an, so dass f auf dem Intervall $[0, a]$ streng monoton wachsend ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} der auf das Intervall $[0, a]$ eingeschränkten Funktion f. Geben Sie den Definitionsbereich $D(f^{-1})$ und den Wertebereich $W(f^{-1})$ an.

---

a) Wegen $\sqrt{x}$ muss $x \geq 0$ sein.
Außerdem muss $\sqrt{x} - x \geq 0$ gelten, also $x \geq x^2$. Für $x > 0$ folgt daraus nach Division durch x die Ungleichung $x \leq 1$.
Damit ergibt sich insgesamt $D(f) = [0, 1]$.
Nullstellen: $f(x) = 0 \iff \sqrt{x} - x = 0 \iff x = x^2 \iff x = 0$ oder $x = 1$

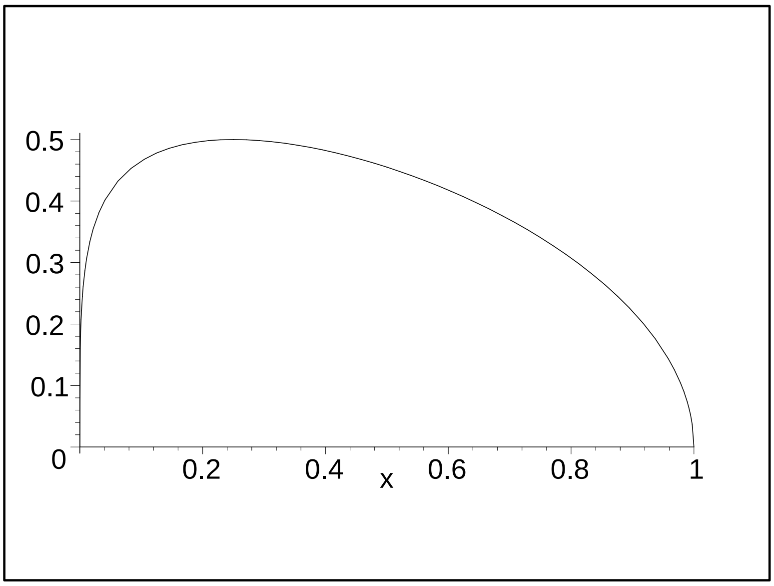
b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{2\sqrt{\sqrt{x} - x}} = \dfrac{1 - 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x} - x}}$ ist definiert für $0 < x < 1$.

Es gilt $f'(x) \to \infty$ für $x \to 0+$ und $f'(x) \to -\infty$ für $x \to 1-$.

c) Da f stetig auf $[0, 1]$ ist, existiert das globale Maximum. Da f positiv auf $(0, 1)$ ist, wird das globale Maximum in einem inneren Punkt des Definitionsbereichs angenommen; daher muss dort $f'(x) = 0$ gelten. Diese Bedingung ist aber nur für $x^* = 1/4$ erfüllt.
Da dies die einzige stationäre Stelle ist, liegt dort das globale Maximum von f, mit $f(x^*) = 1/2$.

d) Mit c) folgt $W(f) = [0, 1/2]$.

e)



f) Für $0 < x < 1/4$ gilt $f'(x) > 0$, also ist f streng monoton wachsend auf $[0, 1/4]$.
Zur Bestimmung der Umkehrfunktion f^{-1} ist die Gleichung $y = \sqrt{\sqrt{x} - x}$ nach x aufzulösen. Dabei muss wegen $f(0) = 0$ die Bedingung $f^{-1}(0) = 0$ beachtet werden.

Durch Quadrieren erhält man zunächst $\boxed{y^2 = \sqrt{x} - x.}$

Lösungsweg 1: Setzt man $\sqrt{x} = u$, so erhält man die quadratische Gleichung $u^2 - u + y^2 = 0$, mit den Lösungen $u = (1 \pm \sqrt{1 - 4y^2})/2$, also $x = \dfrac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}\right)^2$.
Wegen $f^{-1}(0) = 0$ folgt daraus

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{1 - 4y^2}\right)^2 .$$

Lösungsweg 2: Aus $y^2 + x = \sqrt{x}$ ergibt sich durch nochmaliges Quadrieren die quadratische Gleichung $x^2 + (2y^2 - 1)x + y^4 = 0$, mit den Lösungen

$$x = \frac{1}{2}\left(1 - 2y^2 \pm \sqrt{(2y^2 - 1)^2 - 4y^4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2y^2 \pm \sqrt{1 - 4y^2}\right).$$

Wegen $f^{-1}(0) = 0$ folgt daraus

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(1 - 2y^2 - \sqrt{1 - 4y^2}\right) .$$

Die beiden Formeln beschreiben die gleiche Funktion f^{-1}, mit $D(f^{-1}) = W(f) = [0, 1/2]$ und $W(f^{-1}) = [0, 1/4]$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Gegeben ist das Polynom

$$p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 6x - 11 \; .$$

a) Wie müssen die Koeffizienten a_4 und a_5 gewählt werden, damit p an der Stelle $x_0 = -1$ eine doppelte Nullstelle besitzt? Hinweis: Verwenden Sie die Ableitung $p'(x)$.

b) Zerlegen Sie das Polynom, das Sie in Teil a) erhalten haben, vollständig in reelle lineare und quadratische Faktoren.

c) In welchen Intervallen nimmt das Polynom aus Teil b) positive (> 0) bzw. negative (< 0) Werte an?

---

a) Mit $p'(x) = 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 15x^2 + 30x - 6$ ergeben sich aus $p(-1) = 0$ und $p'(-1) = 0$ die beiden Gleichungen (dabei ist direktes Einsetzen wesentlich einfacher als die Verwendung des Horner-Schemas)

$$-a_5 + a_4 = -5 \qquad \text{und} \qquad 5a_5 - 4a_4 = 21$$

mit den Lösungen $a_5 = 1$ und $a_4 = -4$.

b) Das Polynom $p(x) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 6x - 11$ hat bei $x_0 = -1$ eine doppelte Nullstelle. Mit dem Horner-Schema erhält man

	1	-4	5	15	-6	-11
$x = -1$		-1	5	-10	-5	11
	1	-5	10	5	-11	$\underline{0}$
$x = -1$		-1	6	-16	11	
	1	-6	16	-11	$\underline{0}$	

Für das Rest-Polynom $x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ kommen als ganzzahlige Nullstellen nur ± 1 und ± 11 infrage.

Mit der Nullstelle $x = 1$ ergibt sich damit die Zerlegung

$$p(x) = (x+1)^2(x-1)(x^2 - 5x + 11) \; ,$$

wobei der letzte Faktor keine reellen Nullstellen hat.

c) Mit der Zerlegung aus b) ergibt sich, dass p positiv ist auf $(1, \infty)$ und negativ auf den Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(-1, 1)$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Für $a > 0$ ist $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{3}{a} \cdot \sin(ax) + \frac{a}{x^2+3} \cdot \cos(ax) \ .$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} f_a(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{a\to 0+} f_a(x) \ .$$

$\lim_{x\to 0} f_a(x) = f_a(0) = \frac{a}{3}$, da f_a stetig auf $\mathbb{R}$ ist

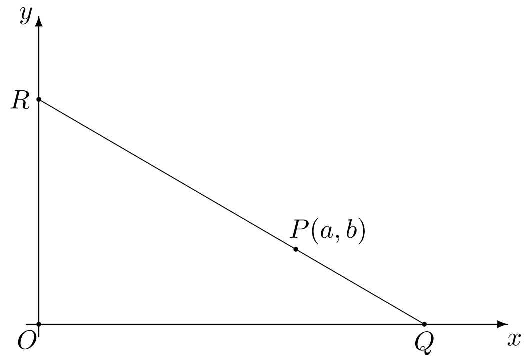
$$\lim_{a\to 0+} f_a(x) = \underbrace{\lim_{a\to 0+} \frac{3\cdot\sin(ax)}{a}}_{\frac{0}{0}} + \underbrace{\lim_{a\to 0+} \frac{a}{x^2+3} \cdot \cos(ax)}_{=0\cdot 1=0} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{a\to 0+} \frac{3x\cos(ax)}{1} \ = \ 3x$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Gegeben ist ein Punkt $P(a, b)$ im ersten Quadranten, also mit Koordinaten $a, b > 0$.

Gesucht ist unter allen Geraden durch P mit negativer Steigung diejenige, für die das aus dem Ursprung O und den beiden Schnittpunkten Q und R mit den Koordinatenachsen gebildete Dreieck den kleinsten Flächeninhalt hat.

Bestimmen Sie diese Gerade und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.



Die Steigung der gesuchten Geraden sei $m < 0$.
Die Gerade durch $P(a, b)$ mit Steigung m hat die Gleichung $y = m(x - a) + b$.
Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$ liefert $y_0 = -ma + b$.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $y = 0$ liefert $x_0 = a - b/m$.
Der doppelte Flächeninhalt des (rechtwinkligen) Dreiecks OQR ist dann gegeben durch

$$f(m) = x_0 \cdot y_0 = \left(a - \frac{b}{m}\right)(-ma + b) = 2ab - a^2 m - \frac{b^2}{m} \qquad \text{für } m < 0.$$

Es gilt

$$f(m) \to \infty \quad \text{für } m \to 0- \qquad \text{und} \qquad f(m) \to \infty \quad \text{für } m \to -\infty,$$

also besitzt f ein globales Minimum.

Aus $f'(m) = -a^2 + \dfrac{b^2}{m^2} \overset{!}{=} 0$ folgt $m_0 = -b/a$ (da $m < 0$).

Ferner gilt $f''(m) = -\dfrac{2b^2}{m^3} > 0$ (da $m < 0$), also liegt in m_0 das globale Minimum von f.

Damit lautet die Gleichung der gesuchten Geraden $y = -(b/a)x + 2b$. Wegen $f(m_0) = 4ab$ ist der zugehörige Flächeninhalt gegeben durch $2ab$.