Aufgabe 1. *(26 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion

$$f^*(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{x}$$

a) Zeigen Sie, dass $f^*(x)$ für alle $x \neq 0$ durch eine Potenzreihe um $x = 0$ dargestellt werden kann. Geben Sie diese Reihe sowohl in Summenschreibweise an, als auch in aufzählender Schreibweise mit mindestens vier nicht verschwindenden Gliedern.

b) Zeigen Sie, dass f^* zu einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann. Geben Sie $f^{(2014)}(0)$, $f^{(2015)}(0)$ und $f^{(2016)}(0)$ an.

c) Zeigen Sie, dass das Infimum von $f(x)$ an genau einer Stelle angenommen wird. Geben Sie an der Stelle $x = 0$ die Gleichung der Tangente und die Krümmung an.

d) Entwickeln Sie die Funktion zweier Veränderlicher $F(x, y) = \int\limits_x^y f(t)\,dt$ in eine Taylorreihe um $(0, 0)$. Für welche (x, y) konvergiert diese Reihe gegen $F(x, y)$?

Lösung

a) Es ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x - \sin x = \left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right] - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots\right] =$$

$$= 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^7}{7!} + 2\frac{x^{11}}{11!} + 2\frac{x^{15}}{15!} + \dots$$

Für alle $x \neq 0$ gilt damit

$$f^*(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{x} = \frac{2}{3!}x^2 + \frac{2}{7!}x^6 + \frac{2}{11!}x^{10} + \frac{2}{15!}x^{14} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{4n+2}}{(4n+3)!}$$

b) Die Potenzreihe ist offenbar eine auch für $x = 0$ definierte Funktion $f(x)$, also eine Fortsetzung von $f^*(x)$. Als überall konvergente Potenzreihe ist sie auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.

Die Ableitungen in der Entwicklungsmitte $x = 0$ können aus der Reihe abgelesen werden. Weil die Koeffizienten von x^{2015} und x^{2016} beide 0 sind (die Hochzahlen haben bezüglich 4 nicht den Rest 2, sondern 3 bzw. 0), ist $f^{(2015)}(0) = f^{(2016)}(0) = 0$. Der Koeffizient a_{2014} von x^{2014} verschwindet hingegen nicht:

$$f^{(2014)}(0) = 2014! \cdot a_{2014} = 2014! \cdot \frac{2}{2015!} = \frac{2}{2015}$$

c) Es ist $f(0) = 0$. Weil alle Reihenglieder positiv sind, ist für alle $x \neq 0$

$$f(x) \geq \frac{2}{3!}x^2 > 0 = f(0)$$

Wegen $f'(0) = 0$ besitzt die Tangente im Minimum $(0,0)$ die Gleichung $y = 0$. Wegen $f''(0) = 2! \cdot \frac{2}{3!} = \frac{2}{3}$ ist die Krümmung dort

$$\kappa = \frac{f''(0)}{(1 + f'(0)^2)^{\frac{3}{2}}} = f''(0) = \frac{2}{3}$$

d) Man erhält die Reihe von $F(x, y)$ durch gliedweises Integrieren:

$$F(x,y) = \int\limits_x^y f(t)\,dt = \int\limits_x^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(4n+3)!} t^{4n+2}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{4n+3}}{(4n+3)\cdot(4n+3)!}\bigg|_x^y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2y^{4n+3}}{(4n+3)\cdot(4n+3)!} - \frac{2x^{4n+3}}{(4n+3)\cdot(4n+3)!}\right] =$$

$$= \frac{2(y^3 - x^3)}{3 \cdot 3!} + \frac{2(y^7 - x^7)}{7 \cdot 7!} + \frac{2(y^{11} - x^{11})}{11 \cdot 11!} + \frac{2(y^{15} - x^{15})}{15 \cdot 15!} + \dots$$

Dies gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2. *(34 Punkte)*

Gegeben sei die von $n \in \mathbb{N}_0$ abhängige Differentialgleichung für $y(x)$

$$(1 + n^2x^2) \cdot y' \;=\; y^n$$

a) Für welche beiden Werte von n ist die Differentialgleichung linear? Prüfen Sie jeweils, ob die Gleichung homogen oder inhomogen ist. Wie lautet die allgemeine Lösung $y_{allg}(x)$ in den beiden Fällen.

b) Für welche Werte von n ist die Gleichung autonom? Für welche Werte von n ist sie separabel? Geben Sie in Abhängigkeit von n die allgemeine Lösung $y_{allg}(x)$ der Differentialgleichung in impliziter Form an. (Eine Auflösung nach y ist also nicht verlangt.)

c) Zeigen Sie, dass für gerades n alle Lösungen der Differentialgleichung monoton wachsend sind. Geben Sie für $n = 1$ alle streng monoton fallenden Lösungen an.

d) Berechnen Sie (in expliziter Form und inklusive Definitionsbereich) die Lösung $y_1(x)$ des Anfangswertproblems

$$(1 + 16x^2) \cdot y' \;=\; y^4 \quad , \quad y(0) = -\sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}}$$

e) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$ die Lösung $y_2(x)$ des Anfangswertproblems

$$(1 + n^2x^2) \cdot y' \;=\; y^n \quad , \quad y(87) = 0$$

Lösung

a) Die Differentialgleichung ist offenbar für $n = 1$ linear, aber auch für $n = 0$, weil dann die Funktion y selbst gar nicht mehr in der Gleichung auftaucht. Die beiden Gleichungen sind

$$y' = 1 \quad (\text{für } n = 0) \qquad \text{und} \qquad y' - \frac{1}{1+x^2} \cdot y = 0 \quad (\text{für } n = 1)$$

Die Gleichung für $n = 0$ ist inhomogen, das Störglied ist $s(x) = 1$. Sie besitzt offenbar die allgemeine Lösung

$$y_{allg}(x) = x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Gleichung für $n = 1$ ist homogen. Sie besitzt die allgemeine Lösung

$$y_{allg}(x) = C \cdot e^{\arctan x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

b) Die Gleichung ist nur für $n = 0$ autonom. Ansonsten tritt die unabhängige Variable x explizit in der Gleichung auf. Die Gleichung ist aber für alle $n \in \mathbb{N}_0$ separabel, kann also mittels Trennung der Veränderlichen gelöst werden. Für $n \geq 2$ und $y \neq 0$ ergibt sich

$$\int \frac{dy}{y^n} = \int \frac{dx}{1+n^2x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{n} \arctan nx + C \ (C \in \mathbb{R})$$

Die allgemeine Lösung $y_{allg}(x)$ besteht für $n \geq 2$ aus der konstanten Lösung $y = 0$ und

$$y^{1-n} = \frac{1-n}{n} \arctan nx + C \ (C \in \mathbb{R})$$

Für $n < 2$ wurde die allgemeine Lösung schon in der vorigen Teilaufgabe angegeben.

c) Für gerades n ist

$$y' = \underbrace{\frac{1}{1+n^2x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{y^n}_{\geq 0} \geq 0$$

Da $e^{\arctan x}$ als Hintereinanderausführung streng monoton wachsender Funktionen auch streng monoton wachsend ist, sind für $n = 1$ genau die Lösungen $C \cdot e^{\arctan x}$ mit $C < 0$ streng monoton fallend.

d) Bekannt ist bereits, dass

$$y^{1-n} = \frac{1-n}{n} \arctan nx + C \text{ , also } y^{-3} = -\frac{3}{4} \arctan 4x + C \ (C \in \mathbb{R})$$

Die Anfangsbedingung liefert $C = -\frac{3\pi}{16}$. Um den Kehrwert bilden zu können, darf die rechte Seite nicht 0 sein, also

$$\arctan 4x \neq -\frac{\pi}{4} \ \Leftrightarrow \ 4x \neq -1 \ \Leftrightarrow \ x \neq -\frac{1}{4}$$

Wegen der Anfangsbedingung bei $x = 0$ muss $x > -\frac{1}{4}$ sein. Die gesuchte Lösung ist dann

$$y_1(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{\frac{3}{4} \arctan 4x + \frac{3\pi}{16}}} \ , \qquad x > -\frac{1}{4}$$

e) Für $n = 0$ ergibt die Anfangsbedingung $0 = 87 + C$, also $y_2(x) = x - 87$. Für $n = 1$ ergibt die Anfangsbedingung $0 = C \cdot 1$, also $y_2(x) \equiv 0$. Dies ist auch die Lösung für $n \geq 2$. Der Definitionsbereich ist in allen Fällen ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. *(30 Punkte)*

Die nachstehend skizzierte Kurve K kann in Polarkoordinaten beschrieben werden durch

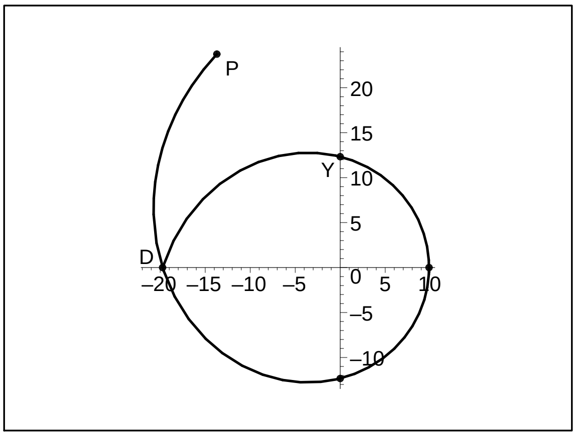
$$K: \quad r \;=\; r(\varphi) \;=\; \varphi^2 + \pi^2 \;; \qquad \varphi \in [-\frac{4}{3}\pi, \pi]$$

a) Zum Winkel $\varphi = -\frac{4\pi}{3}$ gehört der markierte Kurvenpunkt P. Geben Sie für P die Polarkoordinaten (r_P, φ_P) und die kartesischen Koordinaten (x_P, y_P) an.

b) Zeigen Sie, dass die Kurve glatt ist. Geben Sie für K eine zulässige Parameterdarstellung mit P als Anfangspunkt an und eine zweite mit P als Endpunkt.

c) Bestimmen Sie im Schnittpunkt Y mit der positiven y-Achse die Tangente in der Form $y = mx + b$.

d) Zeigen Sie, dass die Kurve K genau einen Doppelpunkt D besitzt. Berechnen Sie den Inhalt F der von der Kurve K vollständig eingeschlossenen Fläche.



e) Geben Sie eine geschlossene Teilkurve K_g von K in Polarkoordinaten an. Ist diese Kurve glatt? Ist sie doppelpunktfrei?

Lösung

a) Für Polarkoordinaten (r, φ) muss $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ sein. Deshalb ist

$$r_P = r(-\frac{4\pi}{3}) = \frac{16\pi^2}{9} + 9\pi^2 = \frac{25\pi^2}{9} \text{ und } \varphi_P = -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Die kartesischen Koordinaten (x_P, y_P) von P ergeben sich zu

$$x_P = r \cdot \cos\varphi = \frac{25\pi^2}{9} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{25\pi^2}{9} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{25\pi^2}{18}$$

$$y_P = r \cdot \sin\varphi = \frac{25\pi^2}{9} \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{25\pi^2}{9} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{25\pi^2}{18}\sqrt{3}$$

b) Die Kurve ist glatt, da die Geschwindigkeit $\underline{\dot{x}} := \frac{dx}{d\varphi}$ nirgends Null wird. Für das Geschwindigkeitsquadrat ergibt sich nämlich

$$\underline{\dot{x}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \geq 0 + (\pi^2)^2 > 0$$

Eine zulässsige Parameterdarstellung mit P als Anfangspunkt ist

$$x = x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos\varphi = (\varphi^2 + \pi^2) \cdot \cos\varphi,$$

$$y = y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin\varphi = (\varphi^2 + \pi^2) \cdot \sin\varphi; \quad \varphi \in [-\frac{4}{3}\pi, \pi]$$

Durch die Transformation $t = -\varphi$ erhält man daraus eine zulässsige Parameterdarstellung mit P als Endpunkt:

$$x = x(t) = (t^2 + \pi^2) \cdot \cos t,\ y = y(t) = -(t^2 + \pi^2) \cdot \sin t; \quad t \in [-\pi, \frac{4}{3}\pi]$$

c) Im Punkt Y ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $r = r(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = \frac{5\pi^2}{4}$. Es ist $\dot{r} = 2\varphi$, also $\dot{r}(\frac{\pi}{2}) = \pi$. Die Tangente in Y hat die Steigung

$$m_Y = \frac{dy}{dx} = \frac{dr}{-r \cdot d\varphi} = -\pi \cdot \frac{4}{5\pi^2} = -\frac{4}{5\pi}$$

Die Gleichung der Tangente in Y ist damit

$$y = -\frac{4}{5\pi}x + \frac{5\pi^2}{4}$$

d) Der Doppelpunkt D muss für zwei Winkel φ_{D1} und $\varphi_{D2} = \varphi_{D1} + 2\pi$ erreicht werden. Der Radius hat dort den gleichen Wert:

$$r(\varphi_{D1}) \stackrel{!}{=} r(\varphi_{D1} + 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{D1}^2 = (\varphi_{D1} + 2\pi)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi_{D1}^2 = \varphi_{D1}^2 + 4\pi\varphi_{D1} + 4\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4\pi\varphi_{D1} + 4\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{D1} = -\pi$$

Es gibt demnach genau einen Doppelpunkt D und dieser entsteht für $\varphi_{D1} = -\pi$ und $\varphi_{D2} = +\pi$. Für die umschlossene Fläche F gilt

$$F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_{D1}}^{\varphi_{D2}} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^2 + \pi^2)^2\, d\varphi = \int_0^{\pi} (\varphi^4 + 2\pi^2\varphi^2 + \pi^4)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{5}\pi^5 + 2\pi^2 \cdot \frac{1}{3}\pi^3 + \pi^5 = \pi^5(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1) = \frac{28}{15}\pi^5$$

e) Der Kurventeil zwischen φ_{D1} und φ_{D2} ist geschlossen:

$$K_g: \quad r = r(\varphi) = \varphi^2 + \pi^2\ ; \qquad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

K_g ist doppelpunktfrei, da es außer Anfangs- und Endpunkt von K_g keine Doppelpunkte gibt. Die Kurve K_g ist aber nicht glatt, da die Tangenten in Anfangs- und Endpunkt nicht übereinstimmen. Die Steigung m_{D1} beim Winkel φ_{D1} ist

$$m_{D1} = \frac{dy}{dx} = \frac{-r \cdot d\varphi}{-dr} = \frac{r}{\dot{r}} = \frac{2\pi^2}{-2\pi} = -\pi$$

Bei φ_{D2} ist aus Symmetriegründen $m_{D2} = -m_{D1} = \pi \neq m_{D1}$.

Aufgabe 4. *(30 Punkte)*

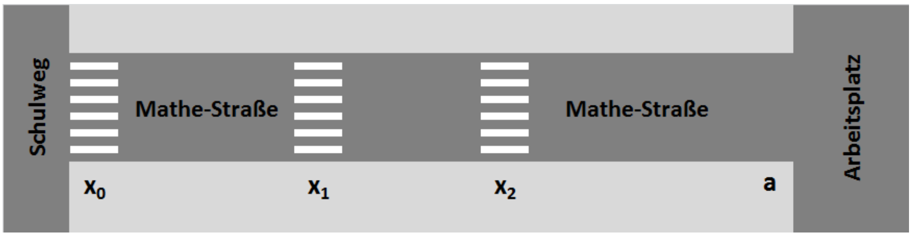
a) Zeigen Sie, dass die vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(x, y) = x^2 + (y - x)^2 + 2(a - y)^2$$

genau eine stationäre Stelle besitzt. Prüfen Sie, ob es sich um ein relatives Minimum, ein relatives Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Begründen Sie, dass f_a unter der Nebenbedingung $y = a$ ein absolutes Minimum besitzt. Bestimmen Sie dieses Minimum.

c) Vom holprigen Schulweg führt die Mathe-Straße (der Länge a) direkt und absolut geradlinig zum schönen Arbeitsplatz, wie nachstehende Skizze zeigt. Am unteren Ende ($x_0 = 0$) der Mathe-Straße befindet sich bereits ein Zebrastreifen, zwei weitere (bei $x_1 > x_0$ und $x_2 > x_1$) sollen hinzukommen. Dies soll so geschehen, dass entlang der Mathe-Straße die mittlere Entfernung zu einem Zebrastreifen möglichst klein ist.



Die mittlere Entfernung ergibt sich (wie in der folgenden Teilaufgabe nachgerechnet werden soll) zu $d(x_1, x_2) = \frac{1}{4a} f_a(x_1, x_2)$. Wie sind nun x_1 und x_2 zu wählen? Wie weit ist es dann im Mittel bis zum nächsten Überweg? Die Breite der Überwege ist zu vernachlässigen.

d) Schreiben Sie die Entfernung $\delta(x, x_1, x_2) = \min\limits_{0 \le i \le 2} |x - x_i|$ einer Stelle $x \geq 0$ der Mathe-Straße zum nächstgelegenen Zebrastreifen als stückweise definierte lineare Funktion. Zeigen Sie, dass sich der mittlere Abstand $d(x_1, x_2) := \frac{1}{a} \int\limits_0^a \delta(x, x_1, x_2)\, dx$ zum nächstgelegenen der drei Zebrastreifen zu $d(x_1, x_2) = \frac{1}{4a} f_a(x_1, x_2)$ ergibt.

Lösung

a) Die partiellen Ableitungen von f_a müssen 0 sein

$$\frac{\partial f_a}{\partial x}(x, y) = 2x - 2(y - x) = 2(2x - y) \stackrel{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; y = 2x$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial y}(x, y) = 2(y - x) - 4(a - y) = 2(3y - x - 2a) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; 5x - 2a = 0$$

Die eindeutige stationäre Stelle befindet sich also bei $(x_S, y_S) = \frac{2}{5}a(1,2)$. Für die Determinante der Hesse-Matrix ergibt sich

$$|H_f| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$$

Es handelt sich demnach um ein relatives Extremum, und zwar wegen $\frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2} = 4 > 0$ um ein Minimum. Der zugehörige Funktionswert ist $f_a(\frac{2a}{5}, \frac{4a}{5}) = \frac{4a^2}{25} + \frac{4a^2}{25} + \frac{2a^2}{25} = \frac{2a^2}{5}$.

b) $g(x) := f_a(x,a) = x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, besitzt also ein absolutes Minimum. Aus $g'(x) = 4x - 2a \stackrel{!}{=} 0$ ergibt sich, dass sich das absolute Minimum bei $x = \frac{a}{2}$ befindet. Wegen $g(a) = \frac{a^2}{2}$ ist das absolute Minimum von f_a unter der Nebenbedingung $y = a$ der Punkt $(\frac{a}{2}, a, \frac{a^2}{2})$.

c) Wie angegeben, wird die zu minimierende mittlere Entfernung durch

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{4a} f_a(x_1, x_2) = \frac{1}{4a}(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + 2(a - x_2)^2)$$

gegeben, für $0 < x_1 < x_2 \leq a$. Wegen der Stetigkeit von f_a gilt dies auch am Rand dieses Bereiches, also auf der kompakten Menge $M_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq a\}$. Die stetige Funktion d besitzt auf M_a nach Weierstraß ein absolutes Minimum.

Dieses Minimum liegt nicht bei $x_1 = 0$ oder $x_1 = x_2$, weil dies das Zusammenfallen zweier Überwege bedeutet. Das ist offenbar schlechter als einen davon an einer beliebigen anderen Stelle anzulegen. Auf dem Rand $x_2 = a$ ist die mittlere Entfernung $(\frac{a^2}{2})$ größer als an der stationären Stelle $(\frac{2a^2}{5})$, wie in den Aufgabenteilen a) und b) nachgerechnet.

Es muss also $x_1 = \frac{2a}{5}$ und $x_2 = \frac{4a}{5}$ gewählt werden. Die mittlere Entfernung zu einem Zebrastreifen ist dann $d(x_1, x_2) = \frac{1}{4a} \cdot \frac{2a^2}{5} = \frac{a}{10}$.

d) Es ist

$$\delta(x, x_1, x_2) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{x_1}{2} \\ x_1 - x & \text{für } \frac{x_1}{2} \leq x \leq x_1 \\ x - x_1 & \text{für } x_1 \leq x \leq \frac{x_1+x_2}{2} \\ x_2 - x & \text{für } \frac{x_1+x_2}{2} \leq x \leq x_2 \\ x - x_2 & \text{für } x_2 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a \cdot d(x_1, x_2) &= \int_0^{\frac{x_1}{2}} x \, dx + \int_{\frac{x_1}{2}}^{x_1} (x_1 - x) \, dx + \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} (x - x_1) \, dx + \\ &+ \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} (x_2 - x) \, dx + \int_{x_2}^{a} (x - x_2) \, dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^{\frac{x_1}{2}} - \frac{1}{2}\left[(x_1 - x)^2\right]_{\frac{x_1}{2}}^{x_1} + \\ &+ \frac{1}{2}\left[(x - x_1)^2\right]_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} - \frac{1}{2}\left[(x_2 - x)^2\right]_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} + \frac{1}{2}\left[(x - x_2)^2\right]_{x_2}^{a} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1^2}{4} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{4} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{4} + (a - x_2)^2\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + 2(a - x_2)^2\right] \end{aligned}$$