Aufgabe 1. (17 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan \sqrt{4x}}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} \cdot |\cos x|$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cdot (x^8 + 1)}$ e) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ f) $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + q^n)^{1/n}$ $(q > 1)$

Lösung

a) Wir substituieren $t := \sqrt{x}$ und erhalten für den Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tan 2t}{t} \overset{?}{=} \lim_{t \to 0} \frac{2(1 + (\tan 2t)^2)}{1} = 2.$$

b) Einmalige Anwendung der Regel von l'Hospital liefert $\frac{m}{n}$.
c) Es liegt hier ein Produkt aus einer Funktion mit Grenzwert 0 und einer beschränkten Funktion vor. Der Grenzwert ist 0.
d) Der Grenzwert ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^8 + 1} = 1.$$

e) Der Grenzwert ist

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

f) Wir haben

$$\lim_{n \to \infty} (1 + q^n)^{1/n} \overset{?}{=} \lim_{n \to \infty} \exp\left(\frac{\ln(1 + q^n)}{n}\right) \overset{?}{=} \lim_{x \to \infty} \exp\left(\frac{\ln(1 + q^x)}{x}\right).$$

Es ist $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1+q^x)}{x} = \ln(q)$ (mit l'Hospital, Fall $\frac{\infty}{\infty}$ weil $q > 1$) und die Stetigkeit der Exponentialfunktion liefert schließlich den Grenzwert q.

Aufgabe 2. (22 Punkte)
a) Lösen Sie die folgende Gleichung. Schreiben Sie dazu zunächst die rechte Seite in Exponentialform.

$$z^2 \;=\; 1 + i \cdot \sqrt{3}$$

b) Bestimmen Sie die vier komplexen Lösungen z_{b1} bis z_{b4} der Gleichung

$$z^4 \;-\; 2z^2 \;+\; 4 \;=\; 0$$

c) Diese vier Lösungen z_{b1} bis z_{b4} bilden in der Gaußschen Zahlenebene ein Rechteck. Welchen Umfang U und welchen Flächeninhalt F besitzt dieses Rechteck?

d) Geben Sie eine Gleichung $z^n = a$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$) an, welche ebenfalls die Lösungen z_{b1} bis z_{b4} besitzt. Welche zusätzlichen Lösungen besitzt diese Gleichung Gleichung $z^n = a$?

Lösung

a) Die Zahl $w := 1 + i \cdot \sqrt{3}$ muss in Exponenentialform dargestellt werden. Bei der Berechnung des Arguments ist wichtig, dass w im ersten Quadranten liegt:

$$|w| \;=\; \sqrt{1+3} = 2 \;, \qquad \arg w \;=\; \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} \;=\; \frac{\pi}{3}$$

$$w \;=\; 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Die beiden Lösungen z_{a1} und z_{a2} der Gleichung $z^2 = w$ werden durch komplexes Wurzelziehen ermittelt:

$$z_{a1} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

$$z_{a2} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6} + \pi)} = -z_{a1}$$

b) Durch die Sustitution $u = z^2$ erhält man eine leicht lösbare quadratische Gleichung:

$$u^2 - 2u + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} \;=\; 1 \pm i \cdot \sqrt{3}$$

Die Rücksubstitution ergibt zwei Gleichungen

$$z^2 = 1 + i \cdot \sqrt{3} = w \qquad \text{und} \qquad z^2 = 1 - i \cdot \sqrt{3} = \overline{w}$$

Die vier Lösungen z_{b1} bis z_{b4} sind damit

$$z_{b1} = z_{a1} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} \;, \qquad z_{b2} = z_{a2} = -z_{a1} = -\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_{b3} = \overline{z_{a1}} = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} \;, \qquad z_{b4} = \overline{z_{a2}} = -\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

c) Zunächst werden mit der Eulerschen Formel Real- und Imaginärteil einer der Zahlen bestimmt:

$$z_{b1} \;=\; \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{6} \;+\; i \cdot \sin\frac{\pi}{6}) \;=\; \sqrt{2} \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{3} \;+\; \frac{i}{2}) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{6} \;+\; \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

Umfang und Flächeninhalt ergeben sich dann elementar:

$$U \;=\; 4 \cdot (\Re z_{b1} + \Im z_{b1}) \;=\; 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$$

$$F \;=\; 4 \cdot \Re z_{b1} \cdot \Im z_{b1} \;=\; \sqrt{12} \;=\; 2\sqrt{3}$$

d) Die Beträge der vier Zahlen z_{b1} bis z_{b4} sind gleich, die Argunente unterscheiden sich um Vielfache von 60°. Deshalb ist $n = 6$ möglich. a ergibt sich durch Potenzieren einer der Zahlen:

$$a \;=\; z_{b1}^6 \;=\; (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}})^6 \;=\; 8 \cdot e^{i\pi} \;=\; -8$$

Alle vier Zahlen z_{b1} bis z_{b4} sind also Lösungen der Gleichung

$$z^6 \;=\; -8$$

Diese Gleichung hat 6 Lösungen, also zwei zusätzliche:

$$z_{d1} \;=\; \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6})} \;=\; \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \;=\; i \cdot \sqrt{2}$$

$$z_{d2} \;=\; -z_{d_1} \;=\; -i \cdot \sqrt{2}$$

Aufgabe 3. (31 Punkte)
a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameter $a \geq 0$ den Definitionsbereich, die Nullstellen und die Polstellen der Funktion

$$f_a(x) \;=\; \frac{3x^2 - a \cdot x}{1 - x^4}$$

b) Zerlegen Sie $f_a(x)$ für $a = 0$ in Partialbrüche. Geben Sie damit (irgend) eine Stammfunktion von f_0 an. Welche Stammfunktion von f_0 geht für $x \to \infty$ gegen 0?

c) Berechnen Sie über die Substitution $x = e^{-t}$ das unbestimmte Integral

$$\int \frac{e^{-3t}}{1 - e^{-4t}}\, dt$$

d) Prüfen Sie in Abhängigkeit von a die Existenz des (eigentlichen oder uneigentlichen) Integrals

$$\int_0^2 f_a(x)\, dx$$

Lösung

a) Nullstellen des Nenners:

$$1 - x^4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^4 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = \pm 1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = +1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm 1$$

Der Definitionsbereich ist damit

$$D(f_a) \;=\; \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Nullstellen des Zählers:

$$3x^2 - a \cdot x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(3x - a) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \;\vee\; x = \frac{a}{3}$$

Die zweite Nullstelle des Zählers liegt für $a = 3$ nicht in $D(f_a)$.

Für $a \neq 3$ hat f_a die (für $a = 0$ zusammenfallenden) Nullstellen

$$x_{N1} = 0 \qquad \text{und} \qquad x_{N2} = \frac{a}{3} \geq 0$$

und die beiden Polstellen

$$x_{P1} = -1 \qquad \text{und} \qquad x_{P2} = +1$$

Für $a = 3$ hat f_a nur die Nullstelle

$$x_{N1} = 0$$

Für diesen Wert von a ist $x_{N2} = x_{P2}$ eine einfache Nullstelle des Zähler-Polynoms und des Nennerpolynoms. Dort befindet sich also kein Pol, sondern eine hebbare Singularität. Folglich gibt es auch nur einen Pol:

$$x_{P1} = -1$$

b) Ansatz:

$$f_0(x) \ = \ \frac{3x^2}{1-x^4} \ \stackrel{!}{=} \ \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C \cdot x + D}{x^2+1}$$

Auf den Hauptnenner gebracht:

$$\frac{3x^2}{1-x^4} \ = \ \frac{A \cdot (x+1)(x^2+1) \ + \ B \cdot (x-1)(x^2+1) \ + \ (Cx+D) \cdot (x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

Zu beachten ist, dass hier die beiden Nenner unterschiedliches Vorzeichen haben. Es ist deshalb für alle $x \in \mathbb{R}$

$$-3x^2 = A \cdot (x+1)(x^2+1) \ + \ B \cdot (x-1)(x^2+1) \ + \ (Cx+D) \cdot (x^2-1)$$

Die Parameter A bis D werden durch Einsetzen spezieller x-Werte und Vergleich von Koeffizienten ermittelt:

$$x = 1: \quad -3 = 4A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{4}$$

$$x = -1: \quad -3 = -4B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{4}$$

$$x = 0: \quad 0 = A - B - D \quad \Rightarrow D = A - B = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Koeff. von } x^3: \quad 0 = A + B + C \quad \Rightarrow \quad C = -(A+B) = 0$$

Die Partialbruchzerlegung ist damit

$$f_0(x) \ = \ \frac{3x^2}{1-x^4} \ = \ \frac{-\frac{3}{4}}{x-1} \ + \ \frac{\frac{3}{4}}{x+1} \ + \ \frac{-\frac{3}{2}}{x^2+1}$$

Für das unbestimmende Integral ergibt sich

$$\int f_0(x)\,dx \ = \ -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} \ + \ \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+1} \ - \ \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \ =$$

$$= \ -\frac{3}{4}\ln|x-1| \ + \ \frac{3}{4}\ln|x+1| \ - \ \frac{3}{2}\arctan x \ + \ C \ =$$

$$= \ \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \ - \ \frac{3}{2}\arctan x \ + \ C$$

Eine Stammfunktion von f_0 ist damit

$$\frac{3}{4}\ln\underbrace{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}_{\to 1} - \frac{3}{2}\underbrace{\arctan x}_{\to\frac{\pi}{2}}$$

Diese Stammfunktion geht für $x \to \infty$ offenbar gegen $-\frac{3}{4}\pi$. Die Stammfunktion, die gegen 0 geht ist damit

$$\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{3}{2}\arctan x + \frac{3}{4}\pi$$

c) Die Substitution $x = e^{-t}$ führt auf das soeben berechnete Integral:

$$\int \frac{e^{-3t}}{1-e^{-4t}}\,dt = \int \frac{(e^{-t})^3}{1-(e^{-t})^4}\,dt = \boxed{\begin{array}{c} x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t}dt \end{array}} = -\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int f_0(x)\,dx = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{1}{2}\arctan x + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^{-t}+1}{e^{-t}-1}\right| + \frac{1}{2}\arctan e^{-t} + C$$

d) Für $a = 3$ ist $f_a(x)$ im Integrationsintervall $[0,2]$ bis auf eine einzelne Defintionslücke stetig. Das (eigentliche) Integral existiert somit.

Für $a \neq 3$ hat der Nenner im Integrationsintervall $[0,2]$ die (einfache) Nullstelle 1. Der Zähler hat dort keine Nullstelle. Bei einer Partialbruchzerlegung wie im vorigen Aufgabenteil würde sich deshalb $B \neq 0$ ergeben. Das uneigentliche Integral

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$$

ist aber divergent. Das Integral $\int_0^2 f_a(x)\,dx$ existiert demnach ebenfalls nicht.

Aufgabe 4. (13 Punkte)
a) Die Funktion f erfülle auf dem Intervall $[a,b]$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung und es gelte $|f'(t)| \leq 1$ für alle $t \in (a,b)$. Zeigen Sie:

$$|f(b) - f(a)| \;\leq\; |b-a|.$$

b) Begründen Sie mit Hilfe von a) die Aussage

$$|\ln b - \ln a| \;\leq |b-a| \quad \text{für} \quad 1 \leq a < b.$$

c) Zeigen Sie, dass sogar gilt

$$|\ln b - \ln a| \;\leq \frac{1}{a} \cdot |b-a| \quad \text{für} \quad 1 \leq a < b.$$

d) Gilt auch

$$|\ln b - \ln a| \;\leq \frac{1}{b} \cdot |b-a| \quad \text{für} \quad 1 \leq a < b\,?$$

Lösung

a) Es gibt eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$, also

$$|f(b) - f(a)| \;=\; |f'(\xi)| \cdot |b-a|.$$

Wegen $|f'(\xi)| \leq 1$ folgt die zu zeigende Aussage.
b) Die Funktion ln ist stetig und sogar differenzierbar auf $(0,\infty)$, ferner gilt $|\ln' t| = \frac{1}{t} \leq 1$ für $t \geq 1$. Somit folgt gemäß a)

$$|\ln b - \ln a| \;\leq\; |b-a| \quad \text{für} \quad 1 \leq a < b.$$

c) Es gilt wie in a)

$$|\ln b - \ln a| \;=\; |1/\xi| \cdot |b-a| \;\leq\; \frac{1}{a} \cdot |b-a|, \text{ weil } \xi > a \geq 1.$$

d) Nein, Gegenbeispiel: $a = 1, b = e$, also $|\ln b - \ln a| = 1 > \frac{1}{e} \cdot (e-1)$.

Aufgabe 5. (18 Punkte)
a) Ermitteln Sie durch partielle Integration eine Rekursionsformel für

$$I_n = \int x^n e^{-x}\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -n! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

c) Bestimmen Sie mit dieser Formel das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Lösung

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int x^n e^{-x}\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = x^n & u' = n \cdot x^{n-1} \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}} = -x^n \cdot e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

b) **Induktionsanfang:** Für $n = 0$ ergibt die linke Seite

$$\int x^n e^{-x}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

und die rechte Seite

$$-n! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + C = -1 \cdot e^{-x} \cdot \frac{x^0}{0!} + C = -e^{-x} + C$$

Die Behauptung ist für $n = 0$ also erfüllt.

Induktionsschritt: Die Behauptung sei erfüllt für ein $n \in \mathbb{N}_0$:

$$I_n = \int x^n e^{-x}\,dx = -n! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Mit der Rekursionsformel ergibt sich für $m = n + 1$

$$I_m = \int x^{n+1} e^{-x}\,dx = -x^m \cdot e^{-x} + m \int x^{m-1} e^{-x}\,dx =$$

$$= \; -x^{n+1} \cdot e^{-x} + (n+1) \cdot \int x^n e^{-x} \, dx$$

Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefert weiter

$$\begin{aligned}
I_m \;&=\; -x^m \cdot e^{-x} \;+\; (n+1) \cdot \left[-n! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + C \right] \;= \\
&=\; -(n+1)! \cdot e^{-x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \;-\; (n+1)! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;+ (n+1) \cdot C \;= \\
&=\; -(n+1)! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \;+\; C^* \;= \\
&=\; -m! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \;+\; C^* \qquad (C^* \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Die Behauptung gilt also auch für $m = n+1$.

Insgesamt ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig.

c) Die soeben bewiesene Formel liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx \;&=\; \left[-n! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right]_0^\infty \;=\; -n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left[x^k e^{-x} \right]_0^\infty \;= \\
&=\; -n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} x^k e^{-x}}_{=0} \;+ n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1 \cdot 0^k}{k!}}_{=0 \text{ für } k>0} \;=\; n! \cdot \frac{0^0}{0!} \;=\; n!
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. (19 Punkte)
a) Es sei

$$f(x) := \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die beiden senkrechten Geraden $x = u$ und $x = u+1$ ($u \in \mathbb{R}$) begrenzen mit der $x-$Achse und dem Funktionsgraphen von f eine Fläche mit dem Inhalt $A(u)$. Bestimmen Sie u so, dass die Fläche den größtmöglichen Wert annimmt. Wie lautet der maximale Flächeninhalt?
Hinweis: Vermeiden Sie die Berechnung einer 2. Ableitung!

b) Zeigen Sie allgemein: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt für jede stationäre Stelle u_0 der Funktion $G(u) := \int\limits_u^{u+1} f(x)dx$ die Aussage $f(u_0) = f(u_0+1)$.

Lösung

Es gilt

$$A(u) = \int\limits_u^{u+1} f(x)dx = \arctan(u+1) - \arctan(u).$$

Die Funktion $A(u)$ ist für $u \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt

$$A'(u) = f(u+1) - f(u) = \frac{-2u-1}{((u+1)^2+1)(u^2+1)},$$

also

$$A'(u) = 0 \Leftrightarrow 2u+1 = 0 \Leftrightarrow u_0 = -\frac{1}{2}.$$

Es ist u_0 eine einfache Nullstelle des Zählerpolynoms $-2u-1$ mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Also ändert $A'(u)$ sein Vorzeichen von $+$ nach $-$, so dass ein (lokales) Maximum an u_0 vorliegt mit

$$A(u_0) = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Wegen $\lim\limits_{u\to+\infty} A(u) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ und $\lim\limits_{u\to-\infty} A(u) = -\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 0$ liegt bei u_0 ein absolutes Maximum von $A(u)$.
b) Es gilt für ein $a \in (u, u+1)$ und mit einer Stammfunktion F von f:

$$G(u) = F(a) - F(u) + F(u+1) - F(a) = F(u+1) - F(u),$$

also $G'(u_0) = 0$ genau dann wenn $F'(u_0+1) - F'(u_0) = 0$, d.h. $f(u_0+1) = f(u_0)$.