Aufgabe 1 (32 Punkte)

Gegeben ist eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = \frac{5t}{1+4t^2}\ , \quad y(t) = 1 - t^2 \qquad \text{für } -1 \le t \le 1.$$

a) Geben Sie Anfangs- und Endpunkt der Kurve an. Welche Steigung hat die Kurve in diesen Kurvenpunkten?

b) Bestimmen Sie die Kurvenpunkte mit waagrechter beziehungsweise senkrechter Tangente.

c) Warum ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse?

d) Skizzieren Sie die Kurve in einem geeigneten Maßstab.

e) Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.
Hinweis: Verwenden Sie dazu den geeigneteren der beiden Integranden $\dot{x}(t)y(t)$ und $x(t)\dot{y}(t)$.

---

a) Anfangspunkt ($t = -1$): $(-1, 0)$, Endpunkt ($t = 1$): $(1, 0)$

Ableitungen: $\dot{x}(t) = \dfrac{5(1-4t^2)}{(1+4t^2)^2}, \quad \dot{y}(t) = -2t$

Steigung in den Kurvenpunkten $(\pm 1, 0)$: $\dfrac{\dot{y}(\pm 1)}{\dot{x}(\pm 1)} = \dfrac{\mp 2}{-3/5} = \pm\dfrac{10}{3}$

b) Waagrechte Tangente:

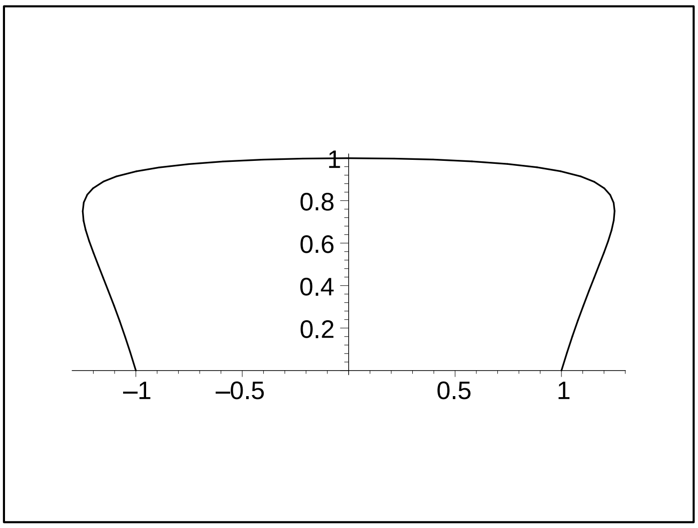
$\dot{y}(t) = -2t \overset{!}{=} 0 \iff t = 0$, also wegen $\dot{x}(0) = 5 \ne 0$ im Kurvenpunkt $(0, 1)$

Senkrechte Tangente:

$\dot{x}(t) = \dfrac{5-20t^2}{(1+4t^2)^2} \overset{!}{=} 0 \iff t = \pm\dfrac{1}{2}$, also wegen $\dot{y}(\pm 1/2) = \mp 1 \ne 0$ in den Kurvenpunkten $(\pm 5/4, 3/4)$.

c) Ist $(x(t), y(t))$ ein Kurvenpunkt, so liegt auch der an der y-Achse gespiegelte Punkt $(x(-t), y(-t)) = (-x(t), y(t))$ auf der Kurve, da y gerade und x ungerade ist.

d)



e)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x(t)\dot{y}(t)\,dt &= -\int_{-1}^{1} \frac{10t^2}{1+4t^2}\,dt \;=\; -\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{4t^2}{1+4t^2}\,dt \\
&= -\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1+4t^2-1}{1+4t^2}\,dt \;=\; -\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{1+4t^2}\right)dt \\
&= -\frac{5}{2}\left(t-\frac{1}{2}\,\arctan(2t)\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= -5+\frac{5}{4}\,[\arctan(2)-\arctan(-2)] \\
&= -5+\frac{5}{2}\,\arctan(2)
\end{aligned}$$

Wegen $\arctan(2) < \pi/2 < 2$ ist der gesuchte Flächeninhalt $5 - \frac{5}{2}\arctan(2) \quad (= 2.232\ldots)$

Aufgabe 2 (17 Punkte)

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in eine Potenzreihe um $x_0 = 1$. Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe? Untersuchen Sie das Verhalten in den Randpunkten.

b) Leiten Sie die Potenzreihe, die Sie in Teil a) erhalten haben, ab. Wie erhalten Sie daraus die Entwicklung der Funktion $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ um $x_0 = 1$? Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe? Untersuchen Sie das Verhalten in den Randpunkten.

---

a) **Lösung 1:** Mit der geometrischen Reihe ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots \qquad \text{für } |x-1| < 1.$$

Die Potenzreihe hat also den Konvergenzradius $R = 1$, und in den beiden Randpunkten 0 und 2 liegt Divergenz vor.

Lösung 2: Für die Ableitungen von f gilt $f^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{k!}{x^{k+1}}$, also $f^{(k)}(1) = (-1)^k\, k!$. Damit erhält man die Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$$

Für die Koeffizienten $a_k = (-1)^k$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} = 1$, also $R = 1$. In den beiden Randpunkten 0 und 2 ist die Reihe divergent, da die Glieder keine Nullfolge bilden.

b) Gliedweises Ableiten der Reihe aus a) liefert

$$-1 + 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 - \ldots$$

Wegen $g(x) = -f'(x)$ ergibt sich daraus die Reihenentwicklung von g in der Form

$$1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(x-1)^k \; .$$

Die gliedweise abgeleitete Potenzreihe besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe. Also hat diese Reihe ebenfalls den Konvergenzradius 1.
Alternativ kann der Konvergenzradius natürlich auch mittels der Koeffizienten bestimmt werden.

In den beiden Randpunkten 0 und 2 ist die Reihe divergent, da die Glieder keine Nullfolge bilden.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Gegeben ist die Funktion zweier Veränderlicher $f(x,y) = x \cdot \sin y - y \cdot \sin x + x^5$.

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Ordnungen 1 und 2. Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(0,0)$ und die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f(0,0)$.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom vom Grad 7 um $(0,0)$ an. Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Taylor-Entwicklung, welche partiellen Ableitungen 4. Ordnung im Punkt $(0,0)$ von Null verschieden sind.

c) Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ ein lokales Extremum besitzt.
Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten von f auf der Geraden $y = x$, also die Funktion $g(x) = f(x,x)$.

---

a) Die Ableitungen der Ordnungen 1 und 2 sind

$$f_x(x,y) = \sin y - y \cdot \cos x + 5x^4$$

$$f_y(x,y) = x \cdot \cos y - \sin x$$

$$f_{xx}(x,y) = y \cdot \sin x + 20x^3$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \cos y - \cos x$$

$$f_{yy}(x,y) = -x \cdot \sin y$$

Damit ist

$$\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Die Taylor-Reihe von $f(x,y)$ ist

$$f(x,y) = x \sin y - y \sin x + x^5 =$$

$$= x^5 + x \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} \pm \dots \right) - y \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots \right) =$$

$$= -\frac{1}{3!}xy^3 + \frac{1}{3!}x^3y + x^5 + \frac{1}{5!}xy^5 - \frac{1}{5!}x^5y - \frac{1}{7!}xy^7 + \frac{1}{7!}x^7y \pm \dots$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 7 ist daher

$$p_7(x,y) = -\frac{1}{6}xy^3 + \frac{1}{6}x^3y + x^5 + \frac{1}{5!}xy^5 - \frac{1}{5!}x^5y$$

Die einzigen Summanden vom Grad 4 sind $-\frac{1}{6}xy^3$ und $\frac{1}{6}x^3y$. Deshalb sind nur die Ableitungen $f_{xyyy}(0,0)$ und $f_{xxxy}(0,0)$ von Null verschieden.

c) Es ist

$$g(x) = f(x,x) = x \cdot \sin x - x \cdot \sin x + x^5 = x^5$$

Für $x < 0$ ist also $f(x,x) < 0$, für $x > 0$ ist $f(x,x) > 0$. In jeder Umgebung von $(0,0)$ gibt es damit Stellen, wo der Funktionswert kleiner als $f(0,0)$ ist und solche, wo er größer als $f(0,0)$ ist. Folglich liegt in $(0,0)$ kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

a) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx$.

b) Berechnen Sie die Integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx$ und $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(x^4-1)\cdot y' = (x^3-1)\cdot y$.

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $(x^4-1)\cdot y' = (x^3-1)\cdot y$, $y(-87)=0$.

---

a) Der Integrand wird in Partialbrüche zerlegt. (Das vorherige Abspalten der gemeinsamen Nullstelle 1 von Zähler und Nenner wäre möglich, ist aber nicht nötig.)

$$\frac{x^3-1}{x^4-1} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad x^3-1 = (ax+b)(x^2-1) + c(x^2+1)(x+1) + d(x^2+1)(x-1)$$

Diese Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen von $x=1$ ergibt sich $c=0$. (Falls man die gemeinsame Nullstelle erkennt, kann man dies schon vorab schließen und den betreffenden Partialbruch sparen.) Es verbleibt

$$x^3-1 = (ax+b)(x^2-1) + d(x^2+1)(x-1)$$

Durch Einsetzen weiterer x-Werte und Vergleich einzelner Koeffizienten ergibt sich

$$x=-1: \quad -2=-4d\ , \quad x=0: \quad -1=-b-d\ , \quad x^3: \quad 1=a+d$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}\ , \quad b=\frac{1}{2}\ , \quad c=0\ , \quad d=\frac{1}{2}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \\
&= \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

b) Die Integrale ergeben sich durch Einsetzen in die Stammfunktion:

$$\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\arctan 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx = -\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 0 = \infty$$

Dieses (uneigentliche) Integral existiert also nicht.

c) Die Lösung gelingt durch Trennung der Veränderlichen:

$$(x^4 - 1) \cdot y' = (x^3 - 1) \cdot y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} dy = \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} dx \quad (y \neq 0, |x| \neq 1)$$

$$\Rightarrow \quad \ln |y| = \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln |x+1| + C} = e^C \cdot \sqrt[4]{x^2 + 1} \cdot \sqrt{|x + 1|} \cdot e^{\frac{1}{2} \arctan x}$$

Zusätzlich gibt es die konstante Lösung $y = 0$. Insgesamt kann die allgemeine Lösung geschrieben werden als

$$y = D \cdot \sqrt[4]{x^2 + 1} \cdot \sqrt{|x + 1|} \cdot e^{\frac{1}{2} \arctan x} \qquad (D \in \mathbb{R})$$

Alternativ kann dies auch über die Lösungsformel für homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten werden.

d) Die triviale Lösung $y = 0$ erfüllt die Anfangsbedingung. Die Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + 2y = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}}$.

b) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung an, die die Anfangsbedingung $y(-\ln\sqrt{2}) = 0$ erfüllt. Auf welchem Intervall stellt diese Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar?

---

a) Die homogene Gleichung $y' + 2y = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$y = C \cdot e^{-2x}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich durch Variation der Konstanten:

$$y(x) = z(x) \cdot e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad y' = z' \cdot e^{-2x} - 2z \cdot e^{-2x}$$

Durch Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt sich

$$z' \cdot e^{-2x} - 2z \cdot e^{-2x} + 2z \cdot e^{-2x} = \sqrt{1 - e^{2x}} \quad \Rightarrow \quad z' = e^{2x} \cdot \sqrt{1 - e^{2x}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = \int e^{2x} \cdot \sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$$

Mit der Substitution $u = 1 - e^{2x}$, also $du = -2e^{2x}dx$ folgt weiter

$$z = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} \left(1 - e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist demnach

$$y = -\frac{1}{3} e^{-2x} \left(1 - e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}} + C \cdot e^{-2x}$$

b) Es ist

$$e^{-2\cdot(-\frac{1}{2}\ln 2)} = e^{\ln 2} = 2$$
$$e^{2\cdot(-\frac{1}{2}\ln 2)} = \frac{1}{2}$$

Also

$$0 = y(-\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + C \cdot 2 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} + 2C = -\frac{1}{6}\sqrt{2} + 2C$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{12}\sqrt{2}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach

$$y = -\frac{1}{3} e^{-2x} \left(1 - e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}\sqrt{2} \cdot e^{-2x}$$

Die Lösung ist definiert für

$$1 - e^{2x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 0$$