Aufgabe 1. ....

a) Der Gradient besteht aus den partiellen Ableitungen:

$$\nabla z = \begin{pmatrix} \cos x \cdot (y^2 + \cos y) \\ (86 + \sin x) \cdot (2y - \sin y) \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix enthält die Ableitungen zweiter Ordnung:

$$H_f = \begin{pmatrix} -\sin x \cdot (y^2 + \cos y) & \cos x \cdot (2y - \sin y) \\ \cos x \cdot (2y - \sin y) & (86 + \sin x) \cdot (2 - \cos y) \end{pmatrix}$$

Es ist

$$z_{yy}(x, y) = \underbrace{(86 + \sin x)}_{\geq 85 > 0} \cdot \underbrace{(2 - \cos y)}_{\geq 1 > 0} > 0$$

b) Die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) ist

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Im Punkt $(0, 0)$ ist dies

$$z = 86 + 1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) = 86 + x$$

Im Punkt $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ist die Tangentialebene

$$z = (86 - 1) + 0 \cdot (x + \frac{\pi}{2}) + 0 \cdot (y - 0) = 85$$

c) Zu zeigen ist, dass beide partiellen Ableitungen an den angegebenen Stellen verschwinden:

$$z_x(\pm\frac{\pi}{2}, 0) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$z_y(\pm\frac{\pi}{2}, 0) = (86 \pm 1) \cdot 0 = 0$$

Bei $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ist

$$H_f = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & (86 - 1) \cdot 1 \end{pmatrix}, \qquad |H_f| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 85 \end{vmatrix} = 85 > 0$$

An dieser Stelle liegt also ein Extremum vor. Wegen $z_{yy} > 0$ handelt sich um ein relatives Minimum. Bei $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ist

$$H_f = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & (86+1) \cdot 1 \end{pmatrix} , \qquad |H_f| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 87 \end{vmatrix} = -87 < 0$$

Dort befindet sich also ein Sattelpunkt.

d) An stationären Stellen ist

$$z_y = \underbrace{(86 + \sin x)}_{\neq 0} \cdot (2y - \sin y) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = \sin y$$

Wegen $|\sin y| \leq |y|$ (für alle $y \in \mathbb{R}$) kann diese Bedingung nur für $y = 0$, also auf der x-Achse erfüllt werden. Die stationären Stellen sind

$$(x_k, y_k) = (\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) \ , \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Es handelt sich dabei abwechselnd um Minima und Sattelpunkte. Die relativen Minima sind bei

$$(x_k, y_k) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0) \ , \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Der Funktionswert ist jeweils 85. Relative Maxima hat die Funktion nicht.

Aufgabe 2. 0

a) Es ist

$$x = (2-t) \cdot (1+t) = -t^2 + t + 2 \ , \qquad y = (2-t) \cdot (3+t) = -t^2 - t + 6$$

$$\dot{x} = -2t + 1 \ , \qquad \dot{y} = -2t - 1$$

Zu integrieren ist wahlweise

$$x \cdot \dot{y} = (-t^2 + t + 2) \cdot (-2t - 1) = 2t^3 + t^2 \cdot (1-2) + t \cdot (-1-4) - 2 =$$

$$= 2t^3 - t^2 - 5t - 2$$

$$y \cdot \dot{x} = (-t^2 - t + 6) \cdot (-2t + 1) = 2t^3 + t^2 \cdot (-1+2) + t \cdot (-1-12) + 6 =$$

$$= 2t^3 + t^2 - 13t + 6$$

$$\frac{1}{2}(x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}) = \frac{1}{2}((2t^3 - t^2 - 5t - 2) - (2t^3 + t^2 - 13t + 6)) = \frac{1}{2}(-2t^2 + 8t - 8) =$$

$$= -t^2 + 4t - 4$$

Für die Schnittpunkte mit der y-Achse gilt

$$x = (2-t)\cdot(1+t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1 \quad \text{oder} \quad t = 2$$

Die Fläche zwischen Kurve und y-Achse hat den Inhalt

$$A_y = \left|\int_{-1}^{2} x\cdot\dot{y}\,dt\right| = \left|\int_{-1}^{2} (2t^3 - t^2 - 5t - 2)\,dt\right| = \left|\left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 2t\right]_{-1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{16}{2} - \frac{8}{3} - \frac{20}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{3} - \frac{5}{2} + 2\right)\right| = \left|\left(-6 - \frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{-1}{3}\right)\right| =$$

$$= |-9| = 9$$

Alternativ kann auch der zweite Intergrand verwendet werden:

$$A_y = \left|\int_{-1}^{2} y\cdot\dot{x}\,dt\right| = \left|\int_{-1}^{2} (2t^3 + t^2 - 13t + 6)\,dt\right| = \left|\left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{13}{2}t^2 + 6t\right]_{-1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{16}{2} + \frac{8}{3} - \frac{52}{2} + 12\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{3} - \frac{13}{2} - 6\right)\right| = \left|\left(-6 + \frac{8}{3}\right) - \left(-12 + \frac{-1}{3}\right)\right| =$$

$$= |9| = 9$$

Schließlich kann auch mit der Sektorformel gearbeitet werden:

$$A_y = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}(x\cdot\dot{y} - y\cdot\dot{x})\,dt\right| = \left|\int_{-1}^{2} (-t^2 + 4t - 4)\,dt\right| = \left|\left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 4t\right]_{-1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\left(-\frac{8}{3} + 8 - 8\right) - \left(-\frac{-1}{3} + 2 + 4\right)\right| = \left|\left(-\frac{8}{3}\right) - \left(6 - \frac{-1}{3}\right)\right| =$$

$$= |-9| = 9$$

b) Für die Schnittpunkte mit der x-Achse gilt

$$y = (2-t)\cdot(3+t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3 \quad \text{oder} \quad t = 2$$

Die Fläche zwischen Kurve und x-Achse hat den Inhalt

$$A_x = \left|\int_{-3}^{2} x\cdot\dot{y}\,dt\right| = \left|\left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 2t\right]_{-3}^{2}\right| =$$

$$= \left|\left(-6 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{81}{2} - \frac{-27}{3} - \frac{45}{2} + 6\right)\right| = \left|\left(-\frac{26}{3}\right) - (33)\right| =$$

$$= \left| -\frac{125}{3} \right| = \frac{125}{3}$$

Alternativ kann wieder der zweite Intergrand verwendet werden:

$$A_x = \left| \int_{-3}^{2} y \cdot \dot{x}\, dt \right| = \left| \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{13}{2}t^2 + 6t \right]_{-3}^{2} \right| =$$

$$= \left| \left(-6 + \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{81}{2} + \frac{-27}{3} - \frac{117}{2} - 18 \right) \right| = \left| \left(-\frac{10}{3} \right) - (-45) \right| =$$

$$= \left| \frac{125}{3} \right| = \frac{125}{3}$$

Schließlich kann auch mit der Sektorformel gearbeitet werden:

$$A_x = \left| \int_{-3}^{2} \frac{1}{2}(x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x})\, dt \right| = \left| \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 4t \right]_{-1}^{2} \right| =$$

$$= \left| \left(-\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{-27}{3} + 18 + 12 \right) \right| = \left| \left(-\frac{8}{3} \right) - (39) \right| =$$

$$= \left| -\frac{125}{3} \right| = \frac{125}{3}$$

c) Zunächst werden die Stellen mit waagrechter und senkrechter Tangente bestimmt:

$$\dot{x} = -2t + 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\dot{y} = -2t - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{2}$$

Da sowohl $x(t)$, als auch $y(t)$ nach unten geöffntete Parabeln sind, handelt es sich jeweils um das absolute Maximum. Die zugehörigen Kurvenpunkte sind

$$\underline{x}(-\frac{1}{2}) = (\frac{5}{4}, \frac{25}{4}) \ , \quad \underline{x}(\frac{1}{2}) = (\frac{9}{4}, \frac{21}{4})$$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind

$$\underline{x}(-1) = (0, 6) \ , \quad \underline{x}(2) = (0, 0)$$

Das kleinste F_y umfassende achsparallele Rechteck hat deshalb den Inhalt

$$R_y = (y(-\frac{1}{2}) - y(2)) \cdot (x(\frac{1}{2} - 0) = \frac{25}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{225}{16}$$

Aufgabe 3. ....

a) Die Summen-Schreibweise ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^3 + n^\alpha}$$

Die Glieder a_n sind

$$a_n = \frac{n^\alpha}{n^3 + n^\alpha} = \frac{1}{n^{3-\alpha} + 1}$$

Für $\alpha = 1$ ist

$$0 < a_n = \frac{1}{n^2 + 1} \le \frac{1}{n^2}$$

Die Reihe besitzt also die konvergente Majorante $\sum \frac{1}{n^2}$ und ist damit selbst konvergent. Für $\alpha = 2$ ist

$$0 < a_n = \frac{1}{n+1}$$

Die Reihe ist also die divergente harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$.

b) Durch Vergleich mit einer harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{n^\beta}$ ergibt sich, dass die vorgelegte Reihe genau für $\alpha < 2$ konvergiert, und zwar absolut. Eine konvergente Majorante ist dann etwa $\frac{1}{n^{3-\alpha}}$. Für $2 \le \alpha < 3$ ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ eine divergente Minorante. Für $\alpha \ge 3$ bilden die Glieder gar keine Nullfolge.

c) Absolut konvergent ist die Reihe $(\sum b_n)$ wegen $|b_n| = a_n$ genau für $\alpha < 2$. Für $2 \le \alpha < 3$ geht $n^{3-\alpha}$ monoton wachsend gegen $+\infty$. $|b_n| = \frac{1}{n^{3-\alpha}+1}$ ist demnach eine monoton fallende Nullfolge. Nach Leibniz ist die Reihe konvergent. Für $\alpha \ge 3$ bilden die Glieder keine Nullfolge. Die Reihe ist also divergent.

Aufgabe 4. ....

a) Mit der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \dots$$

ergibt sich

$$f(x) \quad = \quad (1 + x^2)\,\frac{1}{1 - 2x^2} \quad = \quad (1 + x^2)(1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8 + 32x^{10} + \dots)$$

$$\begin{array}{rlllllll} = & 1 & +2x^2 & +4x^4 & +8x^6 & +16x^8 & +32x^{10} & +\ldots \\ & & +x^2 & +2x^4 & +4x^6 & +8x^8 & +16x^{10} & +\ldots \\ = & 1 & +3x^2 & +6x^4 & +12x^6 & +24x^8 & +48x^{10} & +\ldots \end{array}$$

b) Die geometrische Reihe konvergiert genau für $|u| < 1$. Da die Multiplikation mit dem Faktor $1 + x^2$ das Konvergenzverhalten nicht beeinflusst, konvergiert die Potenzreihe genau für $2x^2 < 1$, also für $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c) In einer Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ ist der Koeffizient von x^k gegeben durch $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Für $k = 10$ ergibt sich also $f^{(10)}(0) = 48 \cdot 10!$

Aufgabe 5. ....

a) Mit $y' = u + xu'$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$xu' = \frac{1}{u}$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int u\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + c_1 \quad \Rightarrow \quad u^2 = 2\ln|x| + c_2$$

Mit $2\ln|x| = \ln x^2$ für $x \neq 0$ erhält man die Lösung

$$u(x) = \pm\sqrt{\ln x^2 + c} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \pm x\sqrt{\ln x^2 + c}$$

b) Aus $y(1) = 1$ folgt $1 = \pm\sqrt{c}$, also $c = 1$ und positives Vorzeichen, somit die Lösung

$$y(x) = x\sqrt{\ln x^2 + 1}$$

Diese Funktion ist definiert und differenzierbar, wenn $x \neq 0$ und $\ln x^2 + 1 > 0$ gilt, also für $x^2 > e^{-1}$. Da $x_0 = 1$ im Lösungsintervall enthalten sein muss, stellt die Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar für

$$x > e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

c) Für $y(1) = -1$ muss in der Lösung aus b) das negative Vorzeichen gewählt werden, also

$$y(x) = -x\sqrt{\ln x^2 + 1} \quad \text{für} \quad x > e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Aus $y(-1) = -1$ folgt $-1 = \pm(-1)\sqrt{c}$, also $c = 1$ und positives Vorzeichen, somit die Lösung

$$y(x) = x\sqrt{\ln x^2 + 1}$$

Da $x_0 = -1$ im Lösungsintervall enthalten sein muss, stellt diese Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar für

$$x < -e^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$