HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSVORLEISTUNG IM **WINTER-SEMESTER 2008/2009**

FACH:	Ergänzungen zur Analysis A	NAME:	Anna Lüsis
DATUM:	26. November 2008		
ZEIT:	10:00 – 11:00	SEMESTER:	M1a
PRÜFER:	Prof. Dr. Wolfgang Erben		

HILFSMITTEL: keine

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Auf diesem Deckblatt müssen **Name und Semester** eingetragen sein ***bevor*** Sie mit der Bearbeitung beginnen. Die zusammengehefteten Blätter dürfen nicht getrennt werden.
- Gewertet wird ***nur*** das (im jeweiligen Antwortkasten eingetragene) **Ergebnis**. Eventuell notwendige Korrekturen müssen eindeutig gekennzeichnet sein.
- Skizzen und Berechnungen müssen auf den ***ausgeteilten*** **Konzeptblättern** durchgeführt werden. Die Konzeptblätter sollen ***nicht*** abgegeben werden.

Abschnitt A. .... 20 Punkte

Aufgabe 1.

a) Die komplexe Zahl

$$z_a = -7i$$

hat den Realteil $\boxed{0}$, den Imaginärteil $\boxed{-7}$, den Betrag $\boxed{+7}$ und das Argument $\boxed{\frac{3\pi}{2}}$.

Ihre Exponentialdarstellung ist

$$z_a = \boxed{7 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}}$$

Die konjugiert komplexe Zahl ist

$$\overline{z_a} = \boxed{7i}$$

b) Die komplexe Zahl

$$z_b = 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

hat den Betrag $\boxed{3}$ und das Argument $\boxed{\frac{7\pi}{4}}$.

Die Exponentialdarstellung der konjugiert komplexen Zahl ist

$$\overline{z_b} = \boxed{3 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

Die normale Darstellung der Zahl z_b (über Real- und Imaginärteil) ist

$$z_b = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{2}(1-i)}$$

Aufgabe 2.

a)

$$(i+3)\cdot(4-i) \quad = \quad \boxed{i+13}$$

b)

$$\frac{25}{i-7} \quad = \quad \boxed{-\tfrac{1}{2}(i+7)}$$

c)

$$\left|\frac{5i-1}{2i+3}\right| \quad = \quad \boxed{\sqrt{2}}$$

d)

$$1+e^{i\pi} \quad = \quad \boxed{0}$$

Abschnitt B. .... 20 Punkte

Aufgabe 3.

a) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) \quad = \quad 1 \ - \ 2\cdot e^{-3x}$$

hat den Wertebereich $W(f) = \boxed{(-\infty,1)}$.

Ihre Ableitung

$$f'(x) = \boxed{6\cdot e^{-3x}}$$

hat den Wertebereich $W(f') = \boxed{(0,\infty)}$.

f ist monoton fallend ja ☐ nein ☒, monoton wachsend ja ☒ nein ☐.

f' ist monoton fallend ja ☒ nein ☐, monoton wachsend ja ☐ nein ☒.

b) Begründen Sie, dass obige Funktion f eine Umkehrfunktion besitzt:

f ist $\boxed{\text{streng monoton}}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ f ist $\boxed{\text{injektiv}}$ $\Longleftrightarrow$ f hat eine Umkehrfunktion

Diese Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \boxed{-\tfrac{1}{3}\ln[\tfrac{1}{2}(1-x)]}$$

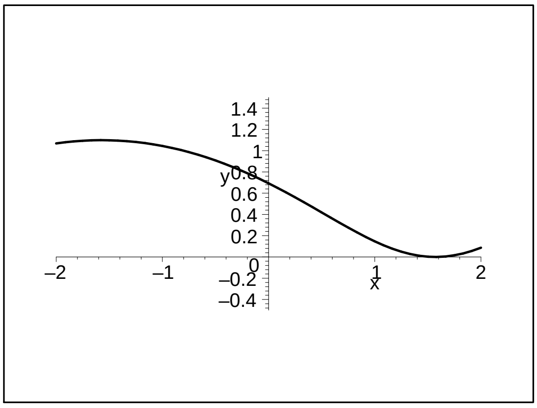
hat den Definitionsbereich $D(f^{-1}) = \boxed{(-\infty,1)}$ und den Wertebereich $W(f^{-1}) = \boxed{\mathbb{R}}$.

f^{-1} ist monoton fallend ja ☐ nein ☒, monoton wachsend ja ☒ nein ☐.

Aufgabe 4.

a) Nebenstehendes Schaubild zeigt die Funktion

$$f(x) = \ln(2 - \sin x)$$



(Maximaler) Definitionsbereich und Wertebereich sind

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$W(f) = [0, \ln 3]$$

b) Die Funktion $f(|x|) = \ln(2 - \sin|x|)$ ist periodisch *ja* ☐ *nein* ☒, beschränkt *ja* ☒ *nein* ☐, gerade *ja* ☒ *nein* ☐, ungerade *ja* ☐ *nein* ☒, stetig *ja* ☒ *nein* ☐, differenzierbar *ja* ☐ *nein* ☒.

c) Die Funktion $|f(x)| = |\ln(2 - \sin x)|$ ist periodisch *ja* ☒ *nein* ☐, beschränkt *ja* ☒ *nein* ☐, gerade *ja* ☐ *nein* ☒, ungerade *ja* ☐ *nein* ☒, stetig *ja* ☒ *nein* ☐, differenzierbar *ja* ☒ *nein* ☐.

Abschnitt C. .... 20 Punkte

Aufgabe 5.

a) $f(x) = (1 + \sin x)^4$

$f'(x) = \boxed{4 \cdot (1 + \sin x)^3 \cdot \cos x}$

b) $f(x) = \ln \ln x$

$f'(x) = \boxed{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}$

c) $f(x) = \ln \ln \ln x$

$f'(x) = \boxed{\frac{1}{\ln \ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}$

Aufgabe 6. $f(x) = 3x^2 + e^{-x}$

a) $f''(x) = \boxed{6 + e^{-x}}$

b) $f^{(10)}(x) = \boxed{e^{-x}}$

c) $f^{(101)}(x) = \boxed{-e^{-x}}$

Aufgabe 7. $f(x) \quad = \quad 3x^2 \cdot e^{-x}$

a) $f'(x) = \boxed{e^{-x} \cdot (6x - 3x^2) = 3x(2-x)e^{-x}}$

b) $f''(x) = \boxed{e^{-x} \cdot (3x^2 - 12x + 6) = 3(x^2 - 4x + 2)e^{-x}}$

c) $f'''(x) = \boxed{e^{-x} \cdot (-3x^2 + 18x - 18) = -3(x^2 - 6x + 6)e^{-x}}$

Aufgabe 8. $f(x,y) \quad = \quad 3x^2 \cdot e^{-y} \quad + \quad 3x^2 \quad + \quad e^{-y}$

$f_x(x,y) = \boxed{6x \cdot e^{-y} + 6x}$

$f_y(x,y) = \boxed{-3x^2 \cdot e^{-y} - e^{-y}}$

$f_{xx}(x,y) = \boxed{6 \cdot e^{-y} + 6}$

$f_{xy}(x,y) = \boxed{-6x \cdot e^{-y}}$

$f_{yx}(x,y) = \boxed{f_{xy}(x,y) = -6x \cdot e^{-y}}$

$f_{yy}(x,y) = \boxed{3x^2 \cdot e^{-y} + e^{-y}}$