Aufgabe 1 (20 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+1))$

---

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2$

oder $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{3(1+x^2)} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}} = \sqrt{2}$ wegen der Stetigkeit der Wurzel-Funktion

e) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+1)) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x+1}\right) = \ln 2$

wegen der Stetigkeit der Logarithmus-Funktion

Aufgabe 2 (13 Punkte)

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = \cos x$ gegeben ist durch

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

b) Wie lautet eine entsprechende Formel für die n-te Ableitung der Funktion $g(x) = \sin x$? (keine Begründung erforderlich)

---

a) **Induktionsanfang:** Für $n = 0$ ist

$$f^{(0)}(x) = \cos\left(x + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) = f(x)$$

Die Behauptung ist für $n = 0$ also erfüllt.

Induktionsschritt: Die Behauptung sei erfüllt für ein $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Durch Ableiten ergibt sich daraus

$$f^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) ,$$

wobei bei der Umformung $(*)$ die angegebene Beziehung verwendet wird. Die Behauptung gilt also auch für $n + 1$.

b) Es ist $g'(x) = \cos x = f(x)$, also für $n \in \mathbb{N}$ $g^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)$ und damit

$$g^{(n)}(x) = \cos\left(x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Wegen $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ gilt diese Formel auch für $n = 0$. Eine noch schönere Analogie ist

$$g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Man kann sich dies direkt überlegen oder aus der ersten Formel gewinnen:

$$g^{(n)}(x) = \cos\left(x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Aufgabe 3 (35 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(4x - x^2)$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und alle Nullstellen von f an.

b) Wie verhält sich $f(x)$, wenn sich x den Randpunkten von $D(f)$ nähert?

c) Geben Sie $f'(x)$ und $f''(x)$ an.

d) Zeigen Sie: Für alle $x \in D(f)$ gilt $f''(x) < 0$.

e) Warum besitzt f genau ein globales Maximum auf $D(f)$? Geben Sie diese Stelle und den zugehörigen Funktionswert an.

f) Skizzieren Sie den Graphen von f in einem geeigneten Maßstab. Sie können dazu die Werte $\ln 2 = 0.693\ldots$ und $\sqrt{3} = 1.732\ldots$ verwenden.

---

a) Wegen $4x - x^2 = x(4-x) > 0 \iff 0 < x < 4$ gilt $D(f) = (0, 4)$.

Nullstellen: $f(x) = \ln(4x - x^2) = 0 \iff 4x - x^2 = 1 \iff x = 2 \pm \sqrt{3}$

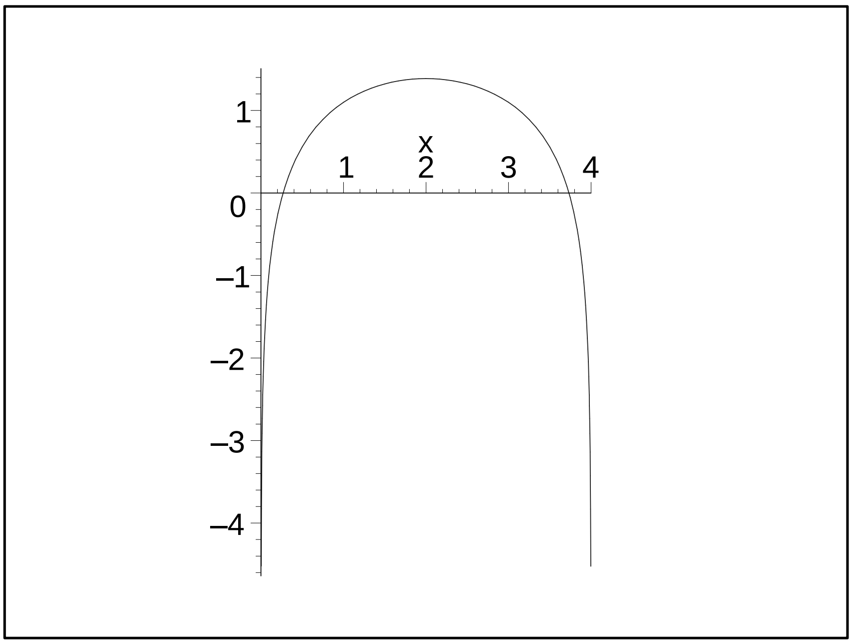
b) Für $x \to 0+$ und $x \to 4-$ gilt $4x - x^2 \to 0+$, also $f(x) \to -\infty$.

c) $f'(x) = 2\,\dfrac{2-x}{4x-x^2}$, $\qquad f''(x) = 2\,\dfrac{-x^2+4x-8}{(4x-x^2)^2}$

d) $f''(x) = -2\,\dfrac{(x-2)^2+4}{(4x-x^2)^2} < 0$ für alle $x \in D(f)$

e) Es gilt $f'(x) = 0$ nur für $x = 2$. Wegen $f''(2) = -1/2 < 0$ liegt dort ein lokales Maximum vor. Wegen b) handelt es sich um das globale Maximum von f, mit $f(2) = \ln 4 = 2\ln 2$.

f)



Aufgabe 4 (22 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 7x$ mit $D(f) = \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie $f'(x)$. Bestätigen Sie mit dem Horner-Schema, dass die Ableitung f' an der Stelle $x = -1/2$ verschwindet. Zeigen Sie, dass dies die einzige stationäre Stelle ist.

b) Begründen Sie, warum die Funktion f an der stationären Stelle ihr absolutes Minimum erreicht. Berechnen Sie den zugehörigen Funktionswert mit dem Horner-Schema. Geben Sie den Wertebereich $W(f)$ der Funktion f an.

c) Zeigen Sie: Für alle $x \in D(f)$ gilt $f''(x) \geq 0$, und es gibt genau eine Stelle x mit $f''(x) = 0$. Geben Sie diese Stelle an.

---

a) Es ist $f'(x) = 8x^3 + 24x^2 + 24x + 7$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & 24 & 24 & 7 \\ -\frac{1}{2} & & -4 & -10 & -7 \\ \hline & 8 & 20 & 14 & \underline{0} \end{array}$$

Für die restlichen Nullstellen gilt

$$8x^2 + 20x + 14 = 2 \cdot (4x^2 + 10x + 7) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 4 \cdot 7}}{8} = \frac{-10 \pm \sqrt{-12}}{8} \notin \mathbb{R}$$

Es gibt also genau eine stationäre Stelle, nämlich bei $x = -\frac{1}{2}$.

b) Es ist $f''(x) = 24x^2 + 48x + 24 = 24 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 24 \cdot (x + 1)^2$.

Wegen $f''(-\frac{1}{2}) = 24 \cdot \frac{1}{4} > 0$ liegt an der einzigen stationären Stelle ein relatives Minimum vor. Wegen $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ ist dies das absolute Minimum.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 8 & 12 & 7 & 0 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{4} & -\frac{11}{8} \\ \hline & 2 & 7 & \frac{17}{2} & \frac{11}{4} & \underline{-\frac{11}{8}} \end{array}$$

Der zugehörige Funktionswert ist also $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{11}{8}$. Damit ist der Wertebereich

$$W(f) = [-11/8, \infty)$$

c) Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$f''(x) = 24 \cdot (x + 1)^2 \geq 0$$

Offenbar verschwindet die zweite Ableitung genau für $x = -1$.

Aufgabe 5 (30 Punkte)
Gegeben ist die Parabel $y = a - x^2$ mit dem Parameter $a > 0$.
Gesucht ist der größte Kreis um $(0,0)$, der ganz „innerhalb" der Parabel liegt.
Geben Sie den Radius dieses Kreises in Abhängigkeit von a an.

Hinweis: Bestimmen Sie den Punkt auf der Parabel, der den kleinsten Abstand vom Ursprung hat.

Minimiert wird das Quadrat des Abstands des Punktes $(x, a-x^2)$ vom Ursprung, also die (auf ganz $\mathbb{R}$ definierte) Funktion

$$f(x) = x^2 + (a - x^2)^2 = x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2 \,.$$

Wegen $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ hat diese Funktion ein globales Minimum, und dort muss $f'(x) = 0$ gelten.

$$f'(x) = 4x^3 + 2(1 - 2a)x = x[4x^2 + 2(1 - 2a)] \qquad f''(x) = 12x^2 + 2(1 - 2a)$$

Für die Untersuchung der Nullstellen von f' ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich:

$\boxed{a < \frac{1}{2}}$: In diesem Fall ist $4x^2 + 2(1 - 2a) > 0$, also gilt $f'(x) = 0$ nur für $x = 0$. Somit liegt dort das globale Minimum, mit $f(0) = a^2$.

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$: Hier sieht man direkt, dass für $f(x) = x^4 + 1/4$ das globale Minimum in $x = 0$ liegt, mit $f(0) = 1/4$.

$\boxed{a > \frac{1}{2}}$: Hier gilt $f'(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{a - 1/2}$. Wegen $f''(0) = 2(1 - 2a) < 0$ und $f''(\pm\sqrt{a - 1/2}) = 12(a - 1/2) + 2(1 - 2a) = 8(a - 1/2) > 0$ liegt das globale Minimum in $x = \pm\sqrt{a - 1/2}$, mit $f(\pm\sqrt{a - 1/2}) = a - 1/4 = (4a - 1)/4$.

Damit ergibt sich der gesuchte Radius $r(a)$ in der Form

$$r(a) = \begin{cases} a & \text{für } a \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{4a - 1} & \text{für } a > \frac{1}{2} \end{cases}$$