Aufgabe 1 (15 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f(t) = e^{6t} \cdot \sin\left(e^{3t}\right)$ für $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int f(t)\,dt$ mit Hilfe der Substitution $u = e^{3t}$.

b) Geben Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ an.

---

a) Für $u = e^{3t}$ ist $du = 3e^{3t}dt$, also

$$\int e^{6t} \cdot \sin\left(e^{3t}\right)\, dt = \frac{1}{3}\int e^{3t} \cdot \sin\left(e^{3t}\right) \cdot 3e^{3t}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int u \cdot \sin u\, du = \frac{1}{3}\left[-u \cdot \cos u + \int \cos u\, du\right] = \frac{1}{3}\left[-u \cdot \cos u + \sin u\right] + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\, e^{3t} \cdot \cos\left(e^{3t}\right) + \frac{1}{3}\, \sin\left(e^{3t}\right) + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{6t} \cdot \sin\left(e^{3t}\right)\, dt &= \frac{1}{3}\left[-e^{3t} \cdot \cos\left(e^{3t}\right) + \sin\left(e^{3t}\right)\right]_{-\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{3}(\sin 1 - \cos 1) - \frac{1}{3}\lim_{b\to-\infty}\left[\underbrace{\sin\left(e^{3b}\right)}_{\to 0} - \underbrace{e^{3b}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\left(e^{3b}\right)}_{\to 1}\right] \\ &= \frac{1}{3}(\sin 1 - \cos 1)\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Gegeben ist eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{und} \quad y(t) = \frac{t}{1+t^2}\ .$$

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks für $0 \le t \le 1$.

b) Welche Kurvenpunkte ergeben sich für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$?

c) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks für $-\infty < t < \infty$.

---

a) Mit $\dot{x}(t) = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$ und $\dot{y}(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ folgt

$$\begin{aligned}(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 &= \frac{1}{(1+t^2)^4}\left[4t^2 + (1-t^2)^2\right] \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^4}(1+t^2)^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

und damit $\displaystyle\int \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan t\ .$

Gesuchte Bogenlänge: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan t\Big|_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

b) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = \lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$

c) Mit der Stammfunktion aus a) ergibt sich die Bogenlänge

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan t\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Gegeben ist die Funktion zweier Veränderlicher

$$f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2) - \frac{3}{5}\,x\ .$$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion genau zwei stationäre Stellen besitzt, wovon eine zu einem relativen Minimum, die andere zu einem Sattelpunkt gehört.

b) Geben Sie die Tangentialebenen der Fläche $z = f(x,y)$ an den Stellen $(0,3)$ und $(3,0)$ an.

c) Entwickeln Sie f in eine Taylor-Reihe um $(0,0)$ bis zu den Gliedern vierter Ordnung.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die Taylor-Reihe der Funktion $\ln(1+u)$.

---

a) An stationären Stellen gilt $f_x = f_y = 0$:

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} - \frac{3}{5} \quad \stackrel{!}{=} 0$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad \stackrel{!}{=} 0$$

Die zweite Bedingung liefert unmittelbar $y = 0$. Dies kann in die erste Bedingung eingesetzt werden:

$$\frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 10x = 3(1+x^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

Es gibt also genau zwei stationäre Stellen, $(3,0)$ und $(\frac{1}{3},0)$. Der Typ der stationären Stellen kann mit Hilfe der Hesse-Matrix bestimmt werden.

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2\cdot(1+x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2\cdot(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{2\cdot(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$\mathbf{H}_f(3,0) = \begin{pmatrix} -16/100 & 0 \\ 0 & 20/100 \end{pmatrix}$ ist indefinit, also liegt dort ein Sattelpunkt.

$\mathbf{H}_f(1/3,0) = \begin{pmatrix} 36/25 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, also liegt dort ein strenges lokales Minimum.

b) $f(3,0) = \ln 10 - 9/5$. Da $(3,0)$ eine stationäre Stelle ist, muss die Tangentialebene waagrecht sein. Ihre Gleichung ist

$$z = \ln 10 - \frac{9}{5}\ .$$

$f(0,3) = \ln 10,\ f_x(0,3) = -3/5,\ f_y(0,3) = 3/5$. Die Gleichung der Tangentialebene ist demnach

$$z = \ln 10 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}(y-3)\ .$$

c) Es ist (für $u \in (-1, 1]$)

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + - \ldots$$

Mit $u = x^2 + y^2$ erhält man

$$\ln(1 + x^2 + y^2) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^3 - + \ldots$$

Der letzte Term liefert bereits nur noch Glieder sechster Ordnung, muss also nicht mehr berücksichtigt werden.

$$\ln(1 + x^2 + y^2) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + - \ldots =$$

$$= x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + - \ldots = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 + - \ldots$$

Insgesamt

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \frac{3}{5}x = -\frac{3}{5}x + x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 + - \ldots$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Betrachtet werden alle Ellipsen der Form $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad$ mit $a, b > 0$, auf denen der Punkt $P(3,1)$ liegt.

a) Bestimmen Sie diejenige Ellipse, deren Flächeninhalt $F = \pi\, a\, b$ minimal ist. Ein Nachweis, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt, ist nicht erforderlich.

b) Vergleichen Sie den Flächeninhalt der von Ihnen bestimmten Ellipse mit dem Flächeninhalt des Kreises um den Nullpunkt, auf dem der Punkt P liegt. Prüfen Sie nach, dass der Flächeninhalt der Ellipse kleiner als der des Kreises ist.

---

a) Setzt man die Koordinaten von P in die Ellipsengleichung ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1\ .$$

Zu minimieren ist dann die Funktion $f(a,b) = ab$ unter dieser Gleichungs-Nebenbedingung.

Notwendig für das Vorliegen eines Extremwerts sind die Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} b &= \lambda \cdot \frac{-18}{a^3} \\ a &= \lambda \cdot \frac{-2}{b^3} \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda = -a^3 b/18 = -ab^3/2$, also $a^2 = 9b^2$.

Eingesetzt in die Nebenbedingung ergibt dies $b^2 = 2$ und $a^2 = 18$, also $a = 3\sqrt{2}$ und $b = \sqrt{2}$.

b) Der Radius des Kreises, auf dem P liegt, beträgt $\sqrt{10}$. Dieser Kreis hat also den Flächeninhalt 10π. Als Flächeninhalt der in a) bestimmten Ellipse ergibt sich dagegen $\pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6\pi$.

Lösung durch Elimination:

Aus der Gleichungsbedingung ergibt sich $b^2 = a^2/(a^2 - 9)$ und damit als Zielfunktion

$$F(a) = \pi\, \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 9}}\ .$$

Aus $F'(a) = 0$ folgt dann $a^2 = 18$, also die gleiche Lösung wie oben.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung $\quad y' = x \cdot (1 - y^2)$.

a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen.

b) Geben Sie die Lösung $y_1(x)$ mit $y_1(0) = 1$ an.

c) Geben Sie die Lösung $y_2(x)$ mit $y_2(0) = 0$ an.

---

a) Bei konstanten Lösungen ist $y' \equiv 0$, also

$$0 = x \cdot (1 - y^2) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Es gibt also zwei konstante Lösungen $y = 1$ und $y = -1$.

b) Offenbar erfüllt die konstante Lösung $y = 1$ die Anfangsbedingung. (Da die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig ist, gibt es keine weiteren Lösungen.)

c) Durch Trennung der Veränderlichen ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (1 - y^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1 - y^2} = x dx \qquad \text{für } y^2 \neq 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1 - y^2} = \int x dx$$

Wegen $y^2 \neq 1$ und der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ist $-1 < y < 1$. Damit folgt

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} = \frac{1}{2} x^2 + C \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{artanh} y = x^2/2 + C \ .$$

Die Anfangsbedingung ergibt $C = 0$, also

$$\ln \frac{1 + y}{1 - y} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + y}{1 - y} = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad 1 + y = (1 - y) \cdot e^{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot (1 + e^{x^2}) = e^{x^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 1}$$

oder

$$y = \tanh(x^2/2) \ ,$$

jeweils für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (25 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + xy = x^3$.

b) Welche Lösung aus Teil a) erfüllt die Anfangsbedingung $y(0) = 0$? Auf welchem Intervall stellt diese Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar?

c) Wenn Sie Teil b) richtig gelöst haben, sollten Sie eine gerade Funktion erhalten haben. Entwickeln Sie diese Funktion in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$ bis zum Glied sechster Ordnung.

---

a) (i) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y(x) = c\, e^{-x^2/2}$$

(ii) Der Ansatz (Variation der Konstanten) $y_p(x) = c(x)\, e^{-x^2/2}$ führt auf

$$c'(x) = x^3\, e^{x^2/2} \ .$$

Mit der Substitution $x^2/2 = u$ und/oder partieller Integration erhält man

$$c(x) = (x^2 - 2)e^{x^2/2} \ ,$$

also die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $y_p(x) = x^2 - 2$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist damit gegeben durch

$$y(x) = x^2 - 2 + c\, e^{-x^2/2} \ .$$

b) Aus $y(0) = 0$ ergibt sich $c = 2$, also die Lösung

$$y(x) = x^2 - 2 + 2\, e^{-x^2/2} \ ,$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

c)
$$\begin{aligned} y(x) &= x^2 - 2 + 2\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \dots\right) \\ &= x^2 - 2 + 2 - x^2 + \frac{1}{4}\, x^4 - \frac{1}{24}\, x^6 + \dots \\ &= \frac{1}{4}\, x^4 - \frac{1}{24}\, x^6 + \dots \end{aligned}$$