Aufgabe 1. (27 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \cos 7x - 2\cos 5x + \cos x$$

a) Geben Sie die Taylor-Reihe von $f(x)$ (um $x = 0$) in Summenschreibweise an. Wo konvergiert die Reihe gegen $f(x)$?

b) Geben Sie das fünfte Taylor-Polynom p_5 von $f(x)$ an.

c) Zeigen Sie, dass $f(x) \cdot x^{-3}$ an der Stelle $x = 0$ zu einer differenzierbaren Funktion $g(x)$ ergänzbar ist und geben Sie diese Funktion $g(x)$ an. Bestimmen Sie $g'(0)$ und $g''(0)$.

d) Geben Sie $g'(x)$ als Potenzreihe an. Wo konvergiert diese Potenzreihe?

Lösung

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Damit ist, ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{7^{2n} - 2 \cdot 5^{2n} + 1}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

b) Das fünfte Taylor-Polynom ergibt sich durch die Glieder der Taylor-Reihe bis zur Potenz x^5 einschließlich:

$$p_5(x) = \frac{1-2+1}{0!} \cdot x^0 - \frac{49-50+1}{2!} \cdot x^2 + \frac{7^4 - 2 \cdot 5^4 + 1}{4!} \cdot x^4 =$$
$$= \frac{49 \cdot 49 - 2 \cdot 25 \cdot 25 + 1}{24} x^4 = \frac{(50 \cdot 49 - 49) - 50 \cdot 25 + 1}{24} x^4 =$$
$$= \frac{50 \cdot (49 - 25) - 49 + 1}{24} x^4 = \frac{50 \cdot 24 - 48}{24} x^4 = (50-2)x^4 = 48x^4$$

c) Da die ersten Glieder in der Taylor-Reihe von $f(x)$ verschwinden, ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{7^{2n} - 2 \cdot 5^{2n} + 1}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{7^{2n}-2\cdot 5^{2n}+1}{(2n)!}\cdot x^{2n-3} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\lim_{x\to 0}\left((-1)^n\cdot\frac{7^{2n}-2\cdot 5^{2n}+1}{(2n)!}\cdot x^{2n-3}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}0 = 0$$

Die Funktion $f(x)\cdot x^{-3}$ ist an der Stelle $x=0$ also stetig ergänzbar zu

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}\cdot(\cos 7x - 2\cos 5x + \cos x) & x\neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Für alle $x\in\mathbb{R}$ ist

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{7^{2n}-2\cdot 5^{2n}+1}{(2n)!}\cdot x^{2n-3}$$

Die Funktion $g(x)$ ist deshalb (beliebig oft) differenzierbar. Die Koeffizienten a_1 von x^1 und a_2 von x^2 legen $g'(0)$ und $g''(0)$ fest:

$$g'(0) = a_1 = (-1)^2\cdot\frac{7^4-2\cdot 5^4+1}{24} = 48$$

$$g''(0) = a_2\cdot 2! = 0$$

d) Potenzreihen dürfen gliedweise differenziert werden. Der Konvergenzradius bleibt dabei gleich. Es ist also für alle $x\in\mathbb{R}$

$$g'(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(7^{2n}-2\cdot 5^{2n}+1)(2n-3)}{(2n)!}\cdot x^{2n-4}$$

Aufgabe 2. (27 Punkte)

Vorgelegt ist für $a \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$a \cdot y'' + y' + y = 0$$

a) Für welchen Wert von a ist $y_1(x) = e^{2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung? Was ist dann die allgemeine Lösung?

b) Für welchen Wert von a ist $y_2(x) = e^{-x}$ eine Lösung der Differentialgleichung? Geben Sie auch für diesen Fall die allgemeine Lösung an.

c) Wie muss a gewählt werden, damit die Differentialgleichung eine Lösung der Form $y_3(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) besitzt? Was ist nun die allgemeine Lösung?

d) Für welche a gibt es eine Lösung y_4 mit $y_4(0) = 0$ und $y_4'(0) = 0$? Geben Sie diese Lösung an.

e) Für welche Werte von a besitzt das zugehörige Anfangswertproblem $y(0) = 0$ und $y'(0) = 3$ eine eindeutige Lösung y_5?

Achtung: Die Antwort muss (wie immer!) begründet sein. Die Lösung braucht aber nicht bestimmt zu werden.

Lösung

a) Durch Einsetzen von $y_1 = e^{2x}$ in die Differentialgleichung ergibt sich

$$0 = a \cdot 4e^{2x} + 2e^{2x} + e^{2x} = e^{2x}(4a + 3) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Dies ist genau für $a = -\frac{3}{4}$ zu erfüllen. Das charakteristische Polynom und ihre Nullstellen sind dann

$$-\frac{3}{4}\lambda^2 + \lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{-\frac{3}{2}} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b) Durch Einsetzen von $y_2 = e^{-x}$ in die Differentialgleichung ergibt sich

$$0 = a \cdot e^{-x} - e^{-x} + e^{-x} = a \cdot e^{-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Dies ist genau für $a = 0$ zu erfüllen. Dadurch entsteht eine Gleichung erster Ordnung. Ihre allgemeine Lösung kann über die bekannte Lösung direkt angegeben werden

$$y = C \cdot e^{-x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

c) Damit $y_3 = x \cdot e^{\lambda x}$ eine Lösung ist, muss λ eine doppelte Nullstelle des charakterischen Polynoms sein:

$$a\lambda^2 + \lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$$

Es muss also $a = \frac{1}{4}$ und damit $\lambda = -2$ sein. Die allgemeine Lösung ist dann

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot xe^{-2x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

d) Die triviale Lösung $y \equiv 0$ ist stets Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung. Sie erfüllt auch die angegebenen Anfangsbedingungen.

Eine Lösung mit den geforderten Bedingungen gibt es also für alle $a \in \mathbb{R}$.

e) Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme hat jede (gutartige) Differentialgleichung **zweiter** Ordnung eine Lösung mit den angegebenen Anfangswerten.

Zu beachten ist aber, dass für $a = 0$ eine Gleichung **erster** Ordnung entsteht. Diese hat schon mit der ersten Bedingung $y(0) = 0$ eine eindeutige Lösung, nämlich $y \equiv 0$. Diese Lösung erfüllt die zweite Bedingung aber nicht.

Eine Lösung des Anfangswertproblems gibt es also genau für $a \neq 0$. Die Lösung ist dann eindeutig.

Aufgabe 3. (35 Punkte)

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) \quad := \quad \int_x^y (\cos t - \frac{1}{2})\, dt$$

a) Geben Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f an. Zeigen Sie: In stationären Stellen ist die Hesse-Matrix invertierbar.

b) Geben Sie ein relatives Minimum, ein relatives Maximum und einen Sattelpunkt von f an.

c) Zeigen Sie, dass es (auf $\mathbb{R}^2$) keine absoluten Extrema gibt. Begründen Sie, dass f im Kreis $x^2 + y^2 \leq 87$ absolute Minima und Maxima besitzt.

d) Geben Sie im Bereich $x \leq y$ das Infimum und das Supremum von f an. Eine Begründung ist (ausnahmsweise!) nicht verlangt.

Lösung

a) Es ist

$$\nabla f = \left(\frac{1}{2} - \cos x \ , \ \cos y - \frac{1}{2} \right), \quad H_f = \begin{pmatrix} \sin x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}$$

In stationären Stellen (x_s, y_s) ist der Gradient der Nullvektor, also $\cos x_s = \cos y_s = \frac{1}{2}$. Wegen $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ für alle a können $\sin x_s$ und $\sin y_s$ nicht 0 sein. Damit ist

$$|H_f| = -\sin x_s \cdot \sin y_s \neq 0$$

Die Hesse-Matrix ist in stationären Stellen also invertierbar.

b) Es ist

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Die drei Stellen

$$S_1(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), \quad S_2(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), \quad S_3(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$$

sind also stationäre Stellen und für die Determinante der Hesse-Matrix gilt dort

$$|H_f(S_1)| = -\frac{3}{4}, \quad |H_f(S_2)| = |H_f(S_3)| = \frac{3}{4}$$

In S_1 befindet sich also ein Sattelpunkt SP, in den anderen beiden Punkten ein relatives Extremum. Wegen $f_{xx}(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) < 0$ und $f_{xx}(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) > 0$ liegt in S_2 ein relatives Maximum HP und in S_3 ein relatives Minimum TP vor. Die Funktionswerte in diesen Stellen sind

$$f(S_1) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos t - \frac{1}{2})\,dt = 0$$

$$f(S_2) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos t - \frac{1}{2})\,dt = \left[\sin t - \frac{1}{2}t\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$f(S_3) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} (\cos t - \frac{1}{2})\,dt = -f(S_2) = -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

Ein relatives Minimum ist demnach $TP(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3},-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})$, ein relatives Maximum $HP(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$, ein Sattelpunkt $SP(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},0)$.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$f(0,2n\pi) = \int_0^{2n\pi} (\cos t - \frac{1}{2})\,dt = \left[\sin t - \frac{1}{2}t\right]_0^{2n\pi} = -n\pi$$

$$f(2n\pi,0) = \int_{2n\pi}^{0} (\cos t - \frac{1}{2})\,dt = -f(0,2n\pi) = n\pi$$

$$\lim_{n\to\infty} f(0,2n\pi) = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(2n\pi,0) = \infty$$

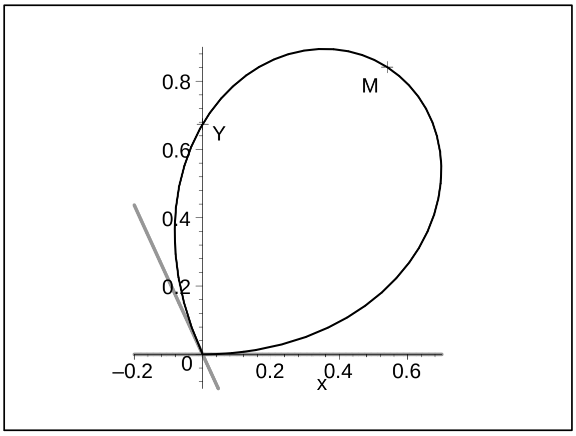
Auf $\mathbb{R}^2$ hat f also weder ein absolutes Maximum, noch ein absolutes Minimum. Der Kreis $x^2 + y^2 \le 87$ ist hingegen abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt die stetige Funktion f dort (mindestens) ein globales Minimum und (mindestens) ein globales Maximum.

d) Im Bereich $x \le y$ ist f — wie der vorige Aufgabenteil zeigt — nicht nach unten beschränkt. Das Infimum ist also $-\infty$. Das Supremum ist $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

Aufgabe 4. (31 Punkte)

Die nebenstehend skizzierte geschlossene Kurve K kann in Polarkoordinaten beschrieben werden durch

$$r = f(\varphi) = \varphi \cdot (2 - \varphi)$$



a) Welche Fläche schließt die Kurve ein?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung $\underline{x}(t)$ der Kurve K an. Bestimmen Sie den markierten Schnittpunkt Y mit der y-Achse.

c) Welchen Winkel α schließen links- und rechtsseitige Tangente im Ursprung O ein? Ist die Kurve K glatt?

d) Wie weit entfernt sich die Kurve maximal vom Ursprung O? Geben Sie den zugehörigen Kurvenpunkt M an.

e) Zeigen Sie, dass für das Bogenelement ds gilt

$$ds = ((\varphi - 1)^2 + 1)\, d\varphi$$

Berechnen Sie damit die Länge der Kurve.

Lösung

a) Wegen $\varphi \cdot (2 - \varphi) = r \geq 0$ ergibt sich $0 \leq \varphi \leq 2$. Weiter ist

$$r^2 = \varphi^2 \cdot (2 - \varphi)^2 = \varphi^2 \cdot (4 - 4\varphi + \varphi^2) = 4\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4$$

Für die von der Kurve eingeschlossene Fläche A liefert die Sektorformel

$$A = \frac{1}{2}\int_0^2 r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^2 (4\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4)\, d\varphi = \left[\frac{2}{3}\varphi^3 - \frac{1}{2}\varphi^4 + \frac{1}{10}\varphi^5\right]_0^2 =$$

$$= \frac{16}{3} - 8 + \frac{16}{5} = 8 \cdot (\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5}) = \frac{8}{15} \cdot (10 - 15 + 6) = \frac{8}{15}$$

b) Eine Parameterdarstellung $\underline{x}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$ der Kurve K ist

$$x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = \varphi \cdot (2 - \varphi) \cdot \cos\varphi$$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = \varphi \cdot (2-\varphi) \cdot \sin\varphi$$

mit $\varphi \in [0,2]$. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich der Punkt Y auf der y-Achse:

$$y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot (2 - \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad Y(0, \pi - \frac{\pi^2}{4})$$

c) Die linksseitige Tangente gehört zum Winkel $\varphi = 0$, die rechtseitige zum Winkel $\varphi = 2$. Die beiden Tangenten schließen also den Winkel 2 ein. Da links- und rechtsseitige Tangente im Ursprung nicht übereinstimmen ist die Kurve K nicht glatt.

d) Für den am weitesten vom Ursprung entfernten Punkt M gilt $r' = 0$.

$$0 = r' = 2 - 2\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 1$$

Wegen $r'' = -2 < 0$ ist das ein relatives Maximum. Der Abstand bei $\varphi = 1$ ist $r = 1$. An beiden Rändern ($\varphi = 0$, $\varphi = 2$) ist $r = 0$. Es handelt sich also um das absolute Maximum. Der größte Abstand zum Ursprung ist also 1. Der zugehörige Kurvenpunkt ist $M(\cos 1, \sin 1)$.

e) Für das Bogenelement ds gilt

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

Zu zeigen ist also, dass

$$r^2 + (r')^2 = ((\varphi - 1)^2 + 1)^2$$

Zunächst wird die linke Seite berechnet:

$$r = \varphi \cdot (2 - \varphi) = 2\varphi - \varphi^2 \quad \Rightarrow \quad r' = 2 - 2\varphi$$

$$r^2 + (r')^2 = 4\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4 + (2 - 2\varphi)^2 = 4 - 8\varphi + 8\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4$$

Und nun die rechte Seite:

$$((\varphi - 1)^2 + 1)^2 = (\varphi - 1)^4 + 2(\varphi - 1)^2 + 1 =$$

$$= (\varphi^4 - 4\varphi^3 + 6\varphi^2 - 4\varphi + 1) + 2(\varphi^2 - 2\varphi + 1) + 1 = 4 - 8\varphi + 8\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4$$

Tatsächlich ist demnach

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = ((\varphi - 1)^2 + 1)\, d\varphi$$

Für die Länge L der Kurve ergibt sich dann

$$L = \int_0^2 \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = \int_0^2 ((\varphi - 1)^2 + 1)\, d\varphi = \int_0^2 (\varphi^2 - 2\varphi + 2)\, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\varphi^3 - \varphi^2 + 2\varphi\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 4 = \frac{8}{3}$$