HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSVORLEISTUNG IM SOMMER-SEMESTER 2014

FACH:	Ergänzungen zur Analysis B	NAME:	Ablei Tung
DATUM:	13. Mai 2014		
ZEIT:	8:00 – 9:00	SEMESTER:	M2a und M2b
PRÜFER:	Drs. Jochen Brunk, Wolfgang Erben		

HILFSMITTEL: keine

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Auf diesem Deckblatt müssen **Name und Semester** eingetragen sein, ***bevor*** Sie mit der Bearbeitung beginnen. Die zusammengehefteten Blätter dürfen nicht getrennt werden.
- Gewertet wird ***nur*** das (im jeweiligen Antwortkasten eingetragene) **Ergebnis**. Eventuell notwendige Korrekturen müssen eindeutig gekennzeichnet sein.
- **Konzeptrechnungen** dürfen ***nur*** auf den Aufgabenblättern (Vorder- und Rückseite) durchgeführt werden.

Abschnitt A. .... 24 Punkte

Aufgabe 1.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+2} = \boxed{\frac{4}{15}}$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n^\alpha + 3}} + \frac{\sqrt{n^\alpha + 5}}{n^5}\right)$ konvergiert genau für $\boxed{2 < \alpha < 8}$

Aufgabe 2.

Geben Sie den Konvergenzradius R und das Konvergenzintervall I der nachstehenden Potenzreihen an.

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} \cdot (x+2)^i$ $R = \boxed{2}$, $I = \boxed{(-4, 0)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} \cdot x^k$ $R = \boxed{\frac{1}{2}}$, $I = \boxed{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

Aufgabe 3.
Entwickeln Sie die angegebenen Funktionen in eine Taylorreihe um 0. Geben Sie mindestens fünf (nicht verschwindende) Glieder an. Die Summendarstellung ist nicht verlangt.

a) $$\frac{e^{2x}-1}{x} = \boxed{2+2x+\tfrac{4}{3}x^2+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{4}{15}x^4+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot x^n}$$

b) $$\frac{1}{4-x^2} = \boxed{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}x^2+\tfrac{1}{64}x^4+\tfrac{1}{256}x^6+\tfrac{1}{1024}x^8+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{4^{n+1}}x^{2n}}$$

Abschnitt B. .... 24 Punkte

Aufgabe 4.

a) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 84e^t$

ist $\boxed{x = 21e^t + C_1e^{-t} + C_2te^{-t}}$

b) Geben Sie eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten an, deren allgemeine Lösung die Funktion $a \cdot \cos 5x + \sqrt{x}$ (für beliebiges $a \in \mathbb{R}$) enthält.

Differentialgleichung: $\boxed{y'' + 25y = 25\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}$

Aufgabe 5.

a) Die Lösung des Anfangswertproblems $y' + 3x^2 \cdot y = x^2$ mit $y(0) = 1$ ist

$y(x) = \boxed{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^{-x^3}}$

b) Die Lösung des Anfangswertproblems $y' = \dfrac{2xe^{-y}}{x^2 - 1}$ mit $y(-\sqrt{2}) = 0$ ist

$y(x) = \boxed{\ln(1 + \ln(x^2 - 1))}$

mit dem Definitionsbereich $D = \boxed{(-\infty, -\sqrt{\frac{e+1}{e}})}$

Abschnitt C. .... 12 Punkte

Aufgabe 6.

a) Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche
$z = f(x,y) = \ln(xy) + \arctan(x^2+y^2)$ im Punkt $(x,y) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

ist $\boxed{z = (\frac{\pi}{4} - \ln 2) + \frac{3}{2}\sqrt{2}(x - \frac{1}{2}\sqrt{2}) + \frac{3}{2}\sqrt{2}(y - \frac{1}{2}\sqrt{2})}$

b) Für die implizit durch $x^8 + y^4 = 17$ gegebene Funktion $y = f(x)$ hat y'

im Punkt $(1,2)$ den Wert $\boxed{-\frac{1}{4}}$

und im Punkt $(\sqrt{2}, -1)$ den Wert $\boxed{16\sqrt{2}}$.

c) Das vollständige Differential von $f(x,y) = \sin(xy^2)$

ist $\boxed{df = y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy}$.