HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSVORLEISTUNG IM <u>SOMMER-SEMESTER 2013</u>

FACH:	Ergänzungen zur Analysis B	NAME:	Ablei Tung
DATUM:	14. Mai 2013		
ZEIT:	17:30 – 18:30	SEMESTER:	M2a und M2b
PRÜFER:	Drs. Gabi Preissler, Wolfgang Erben		

HILFSMITTEL: keine

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Auf diesem Deckblatt müssen **Name und Semester** eingetragen sein, ***bevor*** Sie mit der Bearbeitung beginnen. Die zusammengehefteten Blätter dürfen nicht getrennt werden.
- Gewertet wird ***nur*** das (im jeweiligen Antwortkasten eingetragene) **Ergebnis**. Eventuell notwendige Korrekturen müssen eindeutig gekennzeichnet sein.
- **Konzeptrechnungen** dürfen ***nur*** auf den Aufgabenblättern (Vorder- und Rückseite) durchgeführt werden.

Abschnitt A. .... 20 Punkte

Aufgabe 1.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k - 1}{8^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{5}{8}\right)^k - \left(\frac{1}{8}\right)^k\right] = \boxed{\frac{32}{21}}$

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^5 - k^\alpha}{k^8}$ konvergiert genau für $\boxed{\alpha < 7}$

c) Die Taylorreihe von $f(x) = 2xe^{-x}$ (um $x_0 = 0$) in Summenschreibweise

ist $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}}$

Aufgabe 2.

a) Es sei $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 5k \cdot x^{k-1}$.

Geben Sie eine Stammfunktion F von f in Gestalt einer Potenzreihe an.

$F(x) = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot x^k}$

b) Geben Sie die Stammfunktion F nun in geschlossener Form an.

$F(x) = \boxed{\frac{5x}{1-x} = \frac{5}{1-x} - 5}$

c) Geben Sie die Funktion f aus Aufgabenteil a) in geschlossener Form an.

$f(x) = \boxed{\frac{5}{(1-x)^2}}$

d) Die Reihe von F hat den Konvergenzradius $R = \boxed{1}$.

Die Reihe von f hat den Konvergenzradius $r = \boxed{1}$.

Abschnitt B. .... 20 Punkte

Aufgabe 3.

a) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - y' = 6x$ ist

$y_{allg}(x) =$ $\boxed{C_1 + C_2 e^x - 6x - 3x^2}$.

b) Geben Sie eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten an, welche die allgemeine Lösung $y_{allg} = \frac{1}{x} + C_1 \sin x + C_2 \cos x$ besitzt.

Differentialgleichung: $\boxed{y'' + y = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}}$

Aufgabe 4.

a) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'x = (x+1)y$ für $x > 0$ ist

$y_{allg}(x) = \boxed{C \cdot x \cdot e^x \quad (C \in R)}$

b) Die Lösung des Anfangswertproblems $y'x = (x+1)y$ mit $y(1) = e$ ist

$y(x) = \boxed{x \cdot e^x \,, \quad x > 0}$

Abschnitt C. .... 20 Punkte

Aufgabe 5. Vorgelegt sei die Funktion f aus $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) \quad = \quad \ln(x^2+y^2) \; + \; \arctan(xy)$$

a) Der Definitionsbereich von f ist $D(f) = \boxed{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$

b) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x \quad = \quad \boxed{\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{y}{1+x^2y^2}}$$

$$f_y \quad = \quad \boxed{\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2}}$$

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion f aus $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) \quad = \quad x^3 \cdot \sin(x+2y) \; + \; \sqrt{y-2}$$

a) Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$f_x \quad = \quad \boxed{3x^2\sin(x+2y) \; + \; x^3\cos(x+2y)}$$

$$f_y \quad = \quad \boxed{2x^3\cos(x+2y) \; + \; \tfrac{1}{2\sqrt{y-2}}}$$

b) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$f_{xx} \quad = \quad \boxed{6x\sin(x+2y) \; + \; 6x^2\cos(x+2y) \; - \; x^3\sin(x+2y)}$$

$$f_{xy} \quad = \quad \boxed{6x^2\cos(x+2y) \; - \; 2x^3\sin(x+2y)}$$

$$f_{yx} \quad = \quad \boxed{f_{xy} = 6x^2\cos(x+2y) \; - \; 2x^3\sin(x+2y)}$$

$$f_{yy} \quad = \quad \boxed{-4x^3\sin(x+2y) \; - \; \tfrac{1}{4(y-2)^{\frac{3}{2}}}}$$